

ED. COLLIGNON

Théorie élémentaire des petites oscillations d'un pendule simple

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 49-55

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__49_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

puisque'il tombe de la hauteur PM, à partir du niveau AB où sa vitesse est nulle.

Prolongeons l'ordonnée MP jusqu'à la rencontre en R avec la circonférence. Nous aurons

$$PM \times PR = PA \times PB,$$

c'est-à-dire

$$PM = \frac{PA \times PB}{PR}.$$

Sur la corde AB comme diamètre décrivons la demi-circonférence AHB, et soit H le point où l'ordonnée PM prolongée la rencontre. On aura

$$\overline{PH}^2 = PA \times PB$$

et, par suite,

$$PM = \frac{\overline{PH}^2}{PR}.$$

On en déduit pour la vitesse

$$(1) \quad v = \sqrt{2g} \frac{PH}{\sqrt{PR}},$$

équation qui va nous servir à déterminer approximativement la *vitesse moyenne* u du point mobile dans son parcours de l'arc ACB.

Les quantités PH et PR sont les seules variables dans l'équation (1), mais elles varient dans des conditions très différentes : PH varie de 0 à $\frac{1}{2}AB$, puis de $\frac{1}{2}AB$ à 0, suivant les ordonnées du demi-cercle AHB rapporté à son diamètre AB; au contraire, la quantité PR reste toujours comprise entre les limites

$$AA' = BB' = 2l \cos \alpha, \quad IC' = l(1 + \cos \alpha),$$

en appelant α l'angle $AOC = AOB$, qui mesure l'écart

initial. Si cet angle est très petit, on a sensiblement

$$AA' = 2l - l\alpha^2 \quad \text{et} \quad IC' = 2l - l\frac{\alpha^2}{2},$$

de sorte que la grandeur PR est très peu variable, et s'écarte peu d'une certaine valeur moyenne qu'on peut regarder comme constante; ce qui introduit dans l'équation (1) une notable simplification.

II. Supposons d'abord α infiniment petit. Les quantités $l\alpha^2$ et $l\frac{\alpha^2}{2}$ sont alors négligeables vis-à-vis de $2l$, et les deux limites de PR deviennent égales à $2l$. On a, par conséquent,

$$(2) \quad v = \sqrt{\frac{g}{l}} PH,$$

de sorte que la moyenne u des valeurs de v correspond à la moyenne des valeurs de PH quand le point H parcourt la demi-circonférence AHB. Cette valeur moyenne est l'ordonnée du centre G des moyennes distances de l'arc AHB à son diamètre AB, ou, en d'autres termes, l'ordonnée du centre de gravité de cet arc. On a, par une formule connue,

$$IG = \frac{AB}{\pi} = \frac{2l \sin \alpha}{\pi}$$

et, par suite,

$$(3) \quad u = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{2l \sin \alpha}{\pi}.$$

La durée t de l'oscillation simple s'obtient en divisant la longueur ACB du chemin parcouru par la vitesse moyenne u du mobile; on a donc

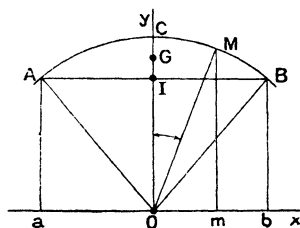
$$(4) \quad t = \frac{2l\alpha}{2l \sin \alpha} \pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

en observant que le rapport $\frac{\alpha}{\sin \alpha}$ a pour limite l'unité, lorsque l'angle α est infiniment petit.

III. Cette formule (4) s'obtient, comme on le voit, sans intégration, pourvu que l'on connaisse la position du centre de gravité d'un arc de cercle homogène; or cette détermination s'obtient également sans intégration en s'aidant de l'équation d'un mouvement circulaire uniforme projeté sur un diamètre fixe.

En effet, soit ACB un arc de cercle, décrit du point O comme centre avec $OA = OB = R$ pour rayon (*fig. 2*).

Fig. 2.



Menons la bissectrice OCY de cet arc, et traçons l'arc OX perpendiculaire à OY.

Imaginons un point M qui parcourt l'arc ACB d'un mouvement uniforme, avec une vitesse angulaire constante, ω , autour du centre O. Projetons le mouvement sur l'axe OX, et soit $Om = x$ l'abscisse du point m, projection de M, à l'époque t ; nous aurons, pour l'équation du mouvement projeté,

$$x = R \sin \omega t,$$

en comptant le temps t à partir du passage du point m en O, ou du point M en C. La vitesse v de ce mouve-

ment sera donnée par l'équation

$$v = \frac{dx}{dt} = R\omega \cos \omega t = \omega R \cos \omega t = \omega y,$$

en appelant y l'ordonnée mM du point M .

La vitesse moyenne u du point m dans le parcours du segment ab , projection de l'arc total, sera le produit ωy_1 de la vitesse angulaire ω par l'ordonnée y_1 , moyenne de toutes les ordonnées y des points de l'arc circulaire, c'est-à-dire par l'ordonnée OG du centre de gravité de cet arc. Nous poserons donc

$$u = \omega y_1 = \frac{ab}{t} = \frac{AB}{t},$$

t étant la durée du parcours $ab = AB$ du point projeté de a en b , ou de A en B le long de la corde. Cette durée est égale à celle du parcours de l'arc ACB par le point M , et l'on a aussi

$$\omega t = \frac{\text{arc } ACB}{R}.$$

Par conséquent, on a à la fois les deux relations

$$\omega y_1 = \frac{AB}{t} \quad \text{et} \quad \omega t = \frac{\text{arc } ACB}{R}.$$

Entre ces deux équations éliminons le produit ωt ; il viendra, en résolvant par rapport à y_1 ,

$$y_1 = \frac{R \times \text{corde } AB}{\text{arc } ACB},$$

formule connue de la distance au point O du centre de gravité de l'arc ACB .

En appelant θ le demi-angle au centre, on transforme la formule en la suivante :

$$y_1 = \frac{R \sin \theta}{\theta},$$

et, appliquée à la demi-circonférence AHB, elle donne

$$IG = \frac{AB}{\pi} = \frac{2l \sin \alpha}{\pi},$$

équation dont nous avons fait usage ⁽¹⁾.

IV. Supposons en second lieu que l'angle α ne soit pas infiniment petit, mais qu'il soit assez petit pour qu'on puisse poser

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2},$$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{6},$$

à titre d'approximation. Les limites de PR sont alors différentes, mais d'une petite quantité, et l'on pourra substituer à PR variable une valeur constante, que nous prendrons égale à

$$PR = 2l \left(1 - \frac{\alpha^2}{3} \right);$$

cela revient à poser

$$PR = \frac{AA' + 2IC'}{3},$$

en affectant du coefficient 2 la plus grande limite, maximum de la variable. Il vient alors, en refaisant les calculs,

$$(2') \quad v = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{PH}{\sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{3}}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{PH}{1 - \frac{\alpha^2}{6}},$$

$$(3') \quad \left\{ \begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{2l \sin \alpha}{\pi \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right)} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{2l \alpha \left(1 - \frac{\alpha^2}{6} \right)}{1 - \frac{\alpha^2}{6}} \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} 2l \alpha, \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁾ Cette démonstration a été donnée dans notre *Mécanique*, t. II, § 182 (IV^e édit., Hachette).

(55)

et, comme $2l\alpha$ est la longueur de l'arc parcouru ACB, on a

$$(4) \quad t = \frac{2l\alpha}{u} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

c'est-à-dire la formule trouvée pour α infiniment petit, étendue aux petits arcs α .