

H. LAURENT

Sur un théorème de Weierstrass

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 454-456

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__454_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D4b]

SUR UN THÉORÈME DE WEIERSTRASS ;

PAR M. H. LAURENT.

Considérons une fonction $f(z)$ synectique dans toute l'étendue du plan, soient $a_1 a_2 \dots a_k$ ses zéros de module ρ , $b_1 b_2 \dots b_l$ ses zéros de module ρ' , etc., et supposons $f(0)$ différent de zéro et

$$r_1 < \rho < r_2 < \rho' < r_3 < \dots$$

Considérons la somme

$$\begin{aligned} 2\pi s \sqrt{-1} = & \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{z-x} + \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x}{z} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x}{z} \frac{dz}{z-x} \\ & + \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^2}{z^2} \frac{dz}{z-x} \\ & + \int_{r_3} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^3}{z^3} \frac{dz}{z-x} - \int_{r_3} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{x^3}{z^3} \frac{dz}{z-x} \\ & + \dots \end{aligned}$$

l'indice r_k placé au bas d'une intégrale indiquant qu'elle doit être prise le long d'une circonférence de rayon r_k décrit de l'origine comme centre.

Si l'on remplace les différences successives par leurs valeurs, on trouve dans l'une d'elles ou dans la première intégrale l'expression $2\pi \sqrt{-1} \frac{f'(x)}{f(x)}$, puis des expressions de la forme

$$\frac{x^h}{a^h} \frac{1}{a-x} 2\pi \sqrt{-1}$$

[qui devront être répétées α fois si a est racine d'ordre α de $f(x) = 0$]. On a donc

$$(1) \quad s = \frac{f'(x)}{f(x)} + \sum \frac{x}{a} \frac{1}{a-x} + \sum \frac{x^2}{b^2} \frac{1}{b-x} \\ + \sum \frac{x^3}{c^3} \frac{1}{c-x} + \dots$$

d'un autre côté, s d'après cette formule est une fonction synectique $\varphi(x)$ de x , et l'on peut la développer par la formule de Maclaurin, car on a

$$2\pi \sqrt{-1} \frac{d^n s}{dx^n} = n! \int_{r_1} \frac{f'(z)}{f(z)} \frac{dz}{(z-x)^{n+1}} \\ + \int_{r_2} \frac{f'(z)}{f(z)} \left[n \frac{x}{z} \frac{1}{(z-x)^{n+1}} + \dots \right] dz + \dots,$$

et pour $x = 0$

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{d^n s}{dx^n} \right)_{x=0} = \frac{d^n}{dz^n} \frac{f'(z)}{f(z)} + \sum \frac{1}{a^{n+1}} + \sum \frac{1}{b^{n+2}} + \dots$$

On en déduit le développement de $\varphi(x)$ par la formule de Maclaurin. La formule (1) ou $s = \varphi(x)$ donne alors en intégrant

$$\int_0^x \varphi(x) dx = \log \frac{f(x)}{f(0)} - \sum P_1 \log \left(1 - \frac{x}{a} \right) \\ - \sum P_2 \log \left(1 - \frac{x}{b} \right) \dots,$$

$P_1, P_2, \dots$ désignant des polynômes du degré 1, 2, ... et, par suite,

$$(2) \quad f(x) = f(0) e^{\int_0^x \varphi(x) dx} \prod e^{P_1 \left(1 - \frac{x}{a} \right)} \prod e^{P_2 \left(1 - \frac{x}{b} \right)} \dots,$$

c'est la formule de Weierstrass, et nous avons une expression de la fonction $\varphi(x)$ qui était restée inconnue jusqu'à présent.

Il est bon d'observer que la méthode précédente ne suppose par les zéros de $f(x)$ simples, on peut les supposer d'un ordre de multiplicité quelconque, même négatif, ce qui veut dire que $a, b, c, \dots$ peuvent être des infinis de $f(x)$, dans ce cas les binomes $\left(1 - \frac{x}{a}\right)$, $\left(1 - \frac{x}{b}\right), \dots$ figureront alors en dénominateurs.