

A. VACQUANT

**Note sur l'hyperbole équilatère inverse
d'une droite OS par rapport à un triangle
 ABC et sur le triangle pédal du point S**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 392-394

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__392_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[L'1 b]

NOTE SUR L'HYPERBOLE ÉQUILATÈRE INVERSE D'UNE
DROITE OS PAR RAPPORT A UN TRIANGLE ABC
ET SUR LE TRIANGLE PÉDAL DU POINT S;

PAR M. A. VACQUANT.

Cette Note peut faire suite à un article de M. G. Fontené, complété par un article de M. R. B. (*N. A.*, 1906, p. 55 à 61). En conservant les notations de M. Fontené, on peut énoncer la question de la façon suivante :

Soit DEF le triangle pédal relatif au point S et au triangle ABC inscrit dans le cercle de centre O; soient M, N, P les milieux des côtés du triangle ABC; soient a, b, c les intersections des droites NP et EF, PM et FD, MD et DE, les trois droites Da, Eb, Fc concourent en un même point K' qui reste le même quand le point S décrit une droite OΔ. Si S₁ et S₂ sont les points de rencontre de OΔ avec le cercle O circonscrit au triangle ABC, K' est le point de rencontre des droites de Simson Δ₁ et Δ₂ relatives à S₁ et S₂, et K' est le centre de l'hy-

perbole équilatère inverse de $O\Delta$ par rapport au triangle ABC.

Quand le point S décrit la droite $O\Delta$, la droite DE enveloppe une parabole tangente aux droites CA , CB et MN , car les divisions D et E , semblables à la division S , sont semblables, et, quand S vient en O , DE devient MN . La tangente variable DE à cette parabole détermine sur les tangentes fixes MN et BC des divisions homographiques c et D qui sont semblables. D'autre part, les divisions F et D sont semblables, comme semblables à la division décrite par S sur $O\Delta$; les divisions F et c , semblables à la division D , sont semblables, et comme les droites BA et MN décrites respectivement par les points F et c sont parallèles, la droite Fc passe par un point fixe K' . En supposant le point S en S_1 ou S_2 sur le cercle circonscrit au triangle ABC , les points correspondants D_1, E_1, F_1 sont en ligne droite, ainsi que D_2, E_2, F_2 ; ces deux droites Δ_1 et Δ_2 , étant les droites de Simson relatives à deux points S_1 et S_2 diamétralement opposés du cercle O , sont rectangulaires. Le point K' est donc le point d'intersection des droites de Simson Δ_1 et Δ_2 . On verrait de même que les droites Eb et Da passent par K' quand S décrit $O\Delta$. Donc Da, Eb, Fc concourent en K' .

Je dis maintenant que K' est le centre de l'hyperbole équilatère inverse de OS . Pour le voir, considérons l'hyperbole équilatère η définie par ses asymptotes $K'\Delta_1, K'\Delta_2$ et le point A . Comme N est le milieu de E_1E_2 et de AC , cette hyperbole passera par C ; de même, elle passera par B ; étant circonscrite au triangle ABC , elle passera par l'orthocentre H de ce triangle. D'autre part, la conique η_1 , inverse de la

droite $O\Delta$, passe par A, B, C et H, car H est l'inverse de O ; c'est donc une hyperbole équilatère, comme on le voit autrement en remarquant que les directions asymptotiques de η_1 sont Δ_1 et Δ_2 , car, si S' est l'inverse de S, on sait que AS' est perpendiculaire à EF ; quand S vient en S_1 , son inverse S'_1 est à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite E_1F_1 ou Δ_1 , c'est-à-dire dans la direction Δ_2 ; de même, quand S vient en S_2 , S'_2 est à l'infini dans la direction Δ_1 . Les hyperboles équilatères η et η_1 , ayant quatre points communs A, B, C, H et mêmes directions asymptotiques, coïncident.

Enfin, on sait que le point K' appartient à la fois au cercle circonscrit au triangle MNP et au cercle circonscrit au triangle DEF ; généralement, on peut dire que les cercles circonscrits aux triangles tels que DEF passent par le point fixe K' quand S décrit $O\Delta$. En particulier, cette importante propriété du point K' a été démontrée élémentairement par M. R. B. dans l'article déjà cité (*N. A.*, 1906, p. 59).