

H. LAURENT

Sur une généralisation de la transformation birationnelle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 355-358

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__355_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[P4h]

**SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA TRANSFORMATION
BIRATIONNELLE;**

PAR M. H. LAURENT.

Soient $i, i', i'', \dots$ les racines d'une équation algébrique

$$f(z) = 0$$

de degré m . On sait que toute fonction rationnelle de i est réductible à la forme $\varphi(i)$, $\varphi(z)$ désignant un polynôme entier de degré $m - 1$ au plus.

Considérons une fonction de m variables

$$x_0, \quad x_1, \quad \dots, \quad x_{m-1}$$

de la forme

$$x_0 + ix_1 + \dots + i^{m-1}x_{m-1} = \gamma,$$

.

et une expression de la forme

$$(1) \quad \frac{ay + b}{a'y + b'} = Y,$$

a, b, a', b', y désignant des quantités indépendantes des x mais pouvant contenir i et ses puissances. Si l'on remplace a, b, a', b', y par leurs valeurs exprimées en fonction de i , Y prendra la forme

$$Y = X_0 + X_1 i + \dots + X_{m-1} i^{m-1}.$$

Pour lui faire acquérir cette forme on observera que Y est de la forme

$$\frac{u_0 + u_1 i + \dots + u_{m-1} i^{m-1}}{v_0 + v_1 i + \dots + v_{m-1} i^{m-1}},$$

où les u et les v sont fonctions linéaires des x , le numérateur et le dénominateur pouvant être remplacés par le reste de leur division par $f(i)$. Cela fait, on multipliera le numérateur et le dénominateur de la fraction précédente par

$$(v_0 + v_1 i' + \dots)(v_0 + v_1 i'' + \dots)(v_0 + v_1 i''' + \dots) \dots$$

qui est une fonction symétrique des racines de $\frac{f(z)}{z-i}$, et qui, par suite, est entier en i ; après cette opération, le numérateur et le dénominateur de Y seront des polynômes entiers en $x_0, x_1, \dots, x_{m-1}$ de degré m au plus et le dénominateur ne contiendra plus i , Y aura donc la forme

$$Y = \frac{\psi_0 + \psi_1 i + \dots + \psi_{m-1} i^{m-1}}{\psi},$$

les ψ étant des fonctions entières des x de degré m .

On aura donc

$$X_0 + X_1 i + \dots + X_{m-1} i^{m-1} = \frac{\psi_0 + i \psi_1 + \dots + i^{m-1} \psi_{m-1}}{\psi}.$$

Or, la racine i étant l'une quelconque des racines de $f(z) = 0$, la formule précédente aura lieu en y remplaçant i par $i', i'', \dots$, elle aura lieu pour m valeurs de i et l'on aura

$$(2) \quad X_0 = \frac{\psi_0}{\psi}, \quad X_1 = \frac{\psi_1}{\psi}, \quad \dots, \quad X_{m-1} = \frac{\psi_{m-1}}{\psi}.$$

Ces formules sont birationnelles, c'est-à-dire que l'on peut les résoudre par rapport aux x et exprimer leurs valeurs en fonction rationnelle de $X_0, X_1, \dots, X_n$. Ce sont des formules analogues à celles de la transformation quadratique dans l'espace à deux dimensions.

Et, en effet, de la formule (1) on tire

$$y = \frac{AY + B}{A'Y + B'},$$

A, B, A', B' étant des polynômes entiers, et, en reprenant mot pour mot ce que nous venons de dire, on aura

$$x_0 = \frac{\Psi_0}{\Psi}, \quad \dots, \quad x_{m-1} = \frac{\Psi_{m-1}}{\Psi},$$

les Ψ étant entiers et de degré $m-1$ en $X_0, \dots, X_{m-1}$.

Les formules (2) sont celles d'un groupe dont il est facile de trouver des invariants différentiels. En considérant Y et y comme des variables complexes formées avec les clefs $i, i^2, \dots, i^{m-1}$, Y sera fonction de y et aura une dérivée $\frac{dY}{dy}$ bien déterminée, alors

$$\frac{dY}{dy} = \frac{\left(\frac{\partial X_0}{\partial x_0} dx_0 + \frac{\partial X_0}{\partial x_1} dx_1 + \dots \right) + i \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_0} dx_0 + \dots \right) \dots}{dx_1 + i dx_1 + \dots}$$

ne dépendant pas de $dx_0 : dx_1 : dx_2 : \dots$, on aura

$$\frac{\partial X_0}{\partial x_0} + i \frac{\partial X_2}{\partial x_0} + \dots = \frac{1}{i} \left(\frac{\partial X_0}{\partial x_0} + i \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \dots \right) = \dots,$$

et ces équations se décomposeront encore en d'autres après avoir été rendues entières en i , en observant qu'elles ont encore lieu en changeant i en i' , i'' , Toutes ces équations ont pour solutions

$$X_0 = \frac{\psi_0}{\psi}, \quad X_1 = \frac{\psi_1}{\psi}, \quad \dots$$

Si, par exemple, $f(z) = z^2 + 1$, on aura

$$\begin{aligned} J' &= \frac{(a + \alpha i)(x_0 + x_1 i) + b + \beta i}{(a' + \alpha' i)(x_0 + x_1 i) + b' + \beta' i} \\ &= \frac{ax_0 - \alpha x_1 + b + i(\alpha x_0 + \alpha x_1 + \beta)}{a'x_0 - \alpha'x_1 + b' + i(\alpha'x_0 + \alpha'x_1 + \beta')} \\ &= \frac{(ax_0 - \alpha x_1 + b)(a'x_0 - \alpha'x_1 + b') + (\alpha x_0 + \alpha x_1 + \beta)(\alpha'x_0 + \alpha'x_1 + \beta')}{(a'x_0 - \alpha'x_1 + b')^2 + (\alpha'x_0 + \alpha'x_1 + \beta')^2} \\ &\quad + \frac{(a'x_0 - \alpha'x_1 + b')(\alpha x_0 + \alpha x_1 + \beta) - (ax_0 - \alpha x_1 + b)(\alpha'x_0 - \dots)}{(a'x_0 - \dots) \dots} i \end{aligned}$$

et l'on aura

$$\begin{aligned} &\frac{X_0}{(ax_0 - \alpha x_1 + b)(a'x_0 - \alpha'x_1 + b') + (\alpha x_0 + \alpha x_1 + \beta)(\alpha'x_0 + \alpha'x_1 + \beta')} \\ &= \frac{X_1}{(a'x_0 - \alpha'x_1 + b')(\alpha x_0 + \alpha x_1 + \beta) - (ax_0 - \alpha x_1 + b)(\alpha'x_0 + \alpha'x_1 + \beta')} \\ &= \frac{1}{(a'x_0 - \alpha'x_1 + b')^2 + (\alpha'x_0 + \alpha'x_1 + \beta')^2}. \end{aligned}$$

Ces équations sont de la forme

$$\frac{X_0}{uu' + v'v} = \frac{X_1}{u'v - v'u} = \frac{1}{v^2 + v'^2},$$

u , u' , v , v' désignant des fonctions linéaires. Si v' est nul, on a

$$\frac{X_0}{uu'} = \frac{X_1}{vu'} = \frac{1}{v^2}.$$