

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 332-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__332_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

480.

(1859, p. 266; 1899, p. 99.)

Soient D_0 un cercle, D_1 une développante de D_0 , D_2 une développante de D_1 , ..., D_n une développante de D_{n-1} . Appelons D_n développante du cercle de l'ordre n . Cela posé, on propose de démontrer le théorème suivant :

Si une figure plane varie en restant semblable à elle-

même, et si trois droites de cette figure ont chacune pour enveloppe une développante de cercle de l'ordre n , toute autre droite de la figure a pour enveloppe une développante de cercle du même ordre. (P. DE LAFFITTE.)

SOLUTION

Par M. THIÉ.

Soit (F) une figure plane qui varie dans son plan en restant semblable à elle-même. Toute droite D de cette figure enveloppe une certaine courbe. Pour une position donnée (F), on obtient le point δ où D touche cette enveloppe par la construction suivante, qui est bien connue :

Soit ω le centre instantané de rotation et de similitude qui correspond à la position considérée. Le point δ est le point de rencontre de D et d'une droite issue du point ω faisant avec D un angle θ qui ne dépend que des éléments qui caractérisent la variation infinitésimale de (F). Cet angle θ est donc indépendant de la droite particulière considérée D.

Par δ menons la perpendiculaire D' à D. Soient m et m' les projections du point ω sur D et sur D'; ωm et $\omega m'$ sont rectangulaires et l'on a

$$\frac{\omega m'}{\omega m} = \cot \theta.$$

Si donc nous considérons plusieurs droites D quelconques de la figure (F), la figure formée par les droites correspondantes D' dérive de la figure formée par les droites D, par une rotation d'un angle droit autour de ω , suivie d'une homothétie caractérisée par le rapport $\cot \theta$. Nous parvenons donc à ce résultat :

Soient $D_1, D_2, \dots$ diverses droites de la figure (F), $D'_1, D'_2, \dots$ les normales aux courbes enveloppes de ces droites, aux points de contact de ces courbes et des droites $D_1, D_2, \dots$ pour une même position de (F). La figure ($D'_1, D'_2, \dots$) est semblable à la figure ($D_1, D_2, \dots$) : elle reste donc constamment semblable à elle-même.

Il est maintenant facile d'établir le théorème énoncé par voie de récurrence.

Supposons, en effet, qu'il soit vérifié, quand les dévelop-

pantes de cercle considérées sont de rang $n-1$. Soient D_1, D_2, D_3, D_4 quatre droites de la figure (F), les trois premières enveloppant des développantes de cercle de rang n . Soient D'_1, D'_2, D'_3, D'_4 les normales aux enveloppes des quatre droites considérées. D'_1, D'_2, D'_3 enveloppent les développées des courbes enveloppes de D_1, D_2, D_3 , c'est-à-dire des développantes de cercle de rang $n-1$. Donc, en vertu de l'hypothèse, D'_4 enveloppe aussi une développante de cercle de rang $n-1$. Donc, D_4 , etc.

Or, le théorème est vrai si l'on suppose $n = -1$, autrement dit si les droites D_1, D_2, D_3 enveloppent des *développées* de cercle, c'est-à-dire passent par des points fixes. Il est, en effet, bien connu que, *si trois droites d'une figure de forme semblable à elle-même passent par trois points fixes, il en est de même de toute autre droite de la figure.*

Le théorème correspondant au cas où $n = 0$ est encore bien connu (théorème de Bobillier).

2019.

(1905, p. 479.)

Par l'un des axes d'une conique W on mène un plan ν perpendiculaire au plan de cette conique; un segment de longueur constante l se déplace sous les conditions suivantes : l'une de ses extrémités décrit la conique W, il reste constamment normal à cette conique, et son autre extrémité est dans le plan ν ; démontrer que cette seconde extrémité décrit une conique V (à laquelle le segment est d'ailleurs constamment normal).

Avec l'autre axe de la conique W, et une autre longueur constante m , on aura une nouvelle conique U. Démontrer qu'un certain segment de longueur constante p peut se déplacer en ayant ses extrémités sur les coniques U et V, et en restant normal à ces deux coniques.

(G. FONTENÉ.)

SOLUTION

Par M. PARROD.

La conique W étant une ellipse dont les demi-axes sont

$$OA = a, \quad OB = b \quad (b < a);$$

considérons dans le plan ν la droite OC faisant avec OA un angle dont le sinus est $\frac{b}{a}$, l'ellipse est située sur le cylindre d'axe OC et de rayon b . Soit HM un rayon du cylindre dont l'extrémité M est située sur W. Il est normal à OC et à W. Un segment MP de longueur l a son extrémité P sur la perpendiculaire HH' abaissée de H sur OA.

Soient $OH' = x$ et $H'P = z$, on a

$$z^2 = l^2 - b^2 + x^2 \frac{b^2}{c^2},$$

ou

$$c^2 z^2 - b^2 x^2 = c^2 (l^2 - b^2);$$

V est une hyperbole d'axes OA et Oz et dont une asymptote est OC.

On a de même, pour l'équation de la conique U dans le plan γOz ,

$$(b^2 - a^2)z^2 - a^2 y^2 = (b^2 - a^2)(m^2 - a^2)$$

ou

$$c^2 z^2 + a^2 y^2 = c^2 (m^2 - a^2);$$

U est une ellipse dont les axes sont Oy et Oz.

Considérons la conique V comme la conique W et formons dans le plan γOz l'équation du lieu correspondant à une longueur p ; en posant

$$A = l^2 - b^2, \quad B = -\frac{c^2}{b^2}(l^2 - b^2),$$

on a

$$(A - B)y^2 - Bz^2 = (A - B)(p^2 - B)$$

ou

$$a^2 y^2 + c^2 z^2 = a^2 \left(p^2 + \frac{c^2}{b^2}(l^2 - b^2) \right).$$

Déterminons p^2 de façon que cette équation soit identique à celle de U, il suffit que

$$p^2 = c^2 \left(\frac{m^2}{a^2} - \frac{l^2}{b^2} \right).$$

On a ainsi la relation

$$\frac{p^2}{c^2} + \frac{l^2}{b^2} = \frac{m^2}{a^2}.$$

Il reste à montrer que le segment MP est normal à la conique V : considérons le segment M_1P_1 voisin de MP ; le cylindre de révolution d'axe MM_1 et de rayon l coupe le plan ν suivant une conique passant par PP_1 ; à la limite PP_1 est tangente au cylindre et à la conique V , donc cette tangente est perpendiculaire au rayon MP du cylindre.

Autres solutions de MM. ABRAMESCU, J. ROSE et VALÈRE MAËS.

2021.

(1905, p. 420.)

Soit un triangle ABC , et soient M, N, P les milieux des côtés. Considérons les projections D, E, F d'un même point sur ces côtés. Si a, b, c sont respectivement les intersections des droites NP et EF , PM et FD , MN et DE , le triangle abc est conjugué par rapport au cercle DEF .

(G. FONTENÉ.)

NOTE.

Cette question se trouve résolue par l'article de M. Fontené : *Sur le cercle pédal*, du numéro de février.