

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 317-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__317_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. *Dans le plan représentatif de la variable complexe z , on trace une circonférence de rayon R , ayant pour centre l'origine et coupant en A et B l'axe des quantités imaginaires, et en C la partie positive de l'axe des quantités réelles. Calculer l'intégrale*

$$\frac{1}{2i\pi} \int \frac{z^3 dz}{e^{2i\pi z^3} - 1} :$$

1° Le long de la circonférence précédente;

2° Le long du contour formé par la demi-circonférence ACB et le diamètre BA.

On supposera $p < R^3 < p + 1$, p désignant un entier positif.

II. Donner l'expression de la fonction $e^{2i\pi z^3} - 1$ sous forme d'un produit infini de facteurs primaires.

III. Si u et v désignent deux paramètres variables indépendants, la droite ayant pour équations :

$$x = uz - 2u - u^3 - 2uv^3,$$

$$y = vz - 3v^2 - u^2v - 2v^4$$

(en coordonnées rectangulaires) est normale à une infinité de surfaces qu'on propose de déterminer.

IV. Déterminer les surfaces S telles que, en un point quelconque de l'une de ces surfaces, ses deux tangentes principales, d'une part, et ses deux directions principales, d'autre part, se projettent sur le plan des xy suivant deux angles ayant leurs bissectrices parallèles à Ox et Oy .

Lignes de courbure de ces surfaces.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère l'intégrale définie

$$\int_{1+\varepsilon}^4 \frac{dx}{x\sqrt{2x^2+2x-4}} \quad (\varepsilon > 0).$$

Cette intégrale a-t-elle une limite pour $\varepsilon = 0$?

Si oui, calculer cette limite. (Juillet 1906.)

Marseille.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Parmi les surfaces qui satisfont à l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = 0,$$

déterminer celles qui satisfont aussi à la condition

$$(p^2 + q^2)(x^2 + y^2) = K^2,$$

où K est une constante donnée, et déterminer leurs lignes de courbure.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer à 0,0001 près l'intégrale définie

$$u = \int_0^1 \frac{dz}{(z^2 + 1) \sqrt{z^2 + 2}} ;$$

1° Quand le point z va du point $z = 0$ au point $z = 1$ directement sur l'axe des x ;

2° Quand le point z varie entre les mêmes limites sur un arc de cercle qui passe au point $z = \frac{i}{2}$;

3° Quand le point z varie entre les mêmes limites sur un arc de cercle qui passe au point $z = \frac{4i}{3}$.

SOLUTION. — On trouve $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{7\pi}{6}$.

(Juillet 1906.)

Paris.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Étant donnée l'équation aux dérivées partielles

$$(I) \quad p^2 + q^2 = 2U(x, y), \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

où $U(x, y)$ est une fonction connue des variables x et y , soit S une surface intégrale quelconque de cette équation :

1° On demande de démontrer que les caractéristiques situées sur cette surface coupent orthogonalement les sections planes faites dans la surface par les plans parallèles au plan des x, y ;

2° Les courbes caractéristiques Γ de l'équation (I) se projettent sur le plan des x, y suivant une famille de courbes (γ) dépendant de deux constantes arbitraires. Former l'équation différentielle du second ordre dont ces courbes (γ) sont l'intégrale générale;

3° Déterminer la fonction $U(x, y)$ de façon que les courbes (γ) soient des circonférences orthogonales à l'axe des x ;

4° Trouver une intégrale complète de l'équation (I) ainsi obtenue et une intégrale particulière se réduisant à zéro pour $x = 0$.

NOTE. — Les axes de coordonnées sont supposés rectangulaires.

II. On considère l'équation différentielle du premier ordre

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = Xy^2 + X_1,$$

où X et X_1 sont des fonctions de la variable complexe x holomorphe à l'intérieur du cercle C , de rayon a , décrit du point $x = 0$ pour centre, et sur ce cercle lui-même. Soit un nombre positif tel que l'on ait

$$|X| \leq m, \quad |X_1| \leq m \quad \text{pour} \quad |x| \leq a.$$

L'équation (1) admet une intégrale particulière y_1 , holomorphe dans le domaine de l'origine et se réduisant à zéro pour $x = 0$. On demande de trouver un nombre positif ρ , ne dépendant que de m et de a , tel que l'intégrale y_1 soit sûrement holomorphe dans le cercle de rayon ρ décrit de l'origine pour centre.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_1^{13} \frac{\sqrt[3]{x - \sqrt{2x-1}}}{x-1} dx.$$

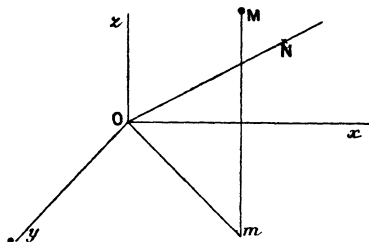
(Juillet 1905.)

ÉPREUVE THÉORIQUE. — Étant donnée une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(1) \quad Pp + Qq = R, \quad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \right),$$

où les coefficients P , Q , R sont des fonctions de deux variables indépendantes x et y , et de la fonction inconnue z , on demande ce qu'on entend par caractéristiques de cette équation. Démontrer que l'intégration de l'équation (1) revient à la détermination des caractéristiques.

APPLICATION. — Soient Ox, Oy, Oz un système de trois axes de coordonnées rectangulaires, M un point d'une surface (S) , m la projection du point M sur le plan xOy , N le point où le plan tangent en M à la surface (S) rencontre la perpendiculaire élevée par l'origine au plan $O m M$.



1° On demande l'équation générale des surfaces (S) , telles que l'on ait $ON = Om$, pour un point quelconque M pris sur la surface;

2° Déterminer la fonction arbitraire de façon que la surface (S) passe par la courbe représentée par les deux équations

$$y = 0, \quad z^2 = 2x;$$

3° Trouver les lignes asymptotiques de cette dernière surface.

II. On fait décrire à la variable complexe z le segment de ligne droite joignant l'origine au point $z = +i$. Quelle est la valeur finale de la fonction $\arcsin z$, si la valeur initiale est égale à $+\pi$?

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^\pi \frac{dx}{(4 \cos x + 5)^2}.$$

(Octobre 1905.)

Poitiers.

ÉPREUVE THÉORIQUE. — I. Les surfaces définies par l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad 1 + p^2 + q^2 = q^2 f(y)$$

Ann. de Mathemat., 4^e série, t. VI. (Juillet 1906.)

ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles au plan zox .

II. Les surfaces définies par l'équation

$$(2) \quad x + pz = \varphi(p)$$

ont un système de lignes de courbure dans des plans parallèles à Oy .

III. Les équations précédentes (1) et (2) ont toujours des solutions communes.

IV. Déterminer ces solutions communes en prenant

$$f(y) = 1 + \frac{1}{4y^2} \quad \varphi(p) = ap.$$

$$\left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y} \right).$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Une lemniscate est donnée dans un plan horizontal : un cercle variable dont le plan est vertical a pour diamètre un rayon vecteur de la lemniscate ; trouver l'aire de la surface ainsi engendrée.

Prendre des coordonnées polaires : rayon vecteur, longitude φ , latitude ψ , et, si le temps le permet, démontrer la formule qui donne l'expression de l'aire au moyen d'une intégrale double.

(Juin 1906.)