

E. GUITTON

Démonstration de la formule

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 237-239

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__237_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[E5]

DÉMONSTRATION DE LA FORMULE

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi};$$

PAR M. E. GUITTON.

Je vais montrer que cette intégrale définie est la limite vers laquelle tend

$$J_m = \int_{-m}^{+m} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx$$

quand m augmente indéfiniment par valeurs entières.

Prouvons d'abord que J_m a pour limite $\sqrt{\pi}$.

Le changement de variable $x = m \sin \varphi$ donne

$$J_m = m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^{2m^2+1} \varphi \, d\varphi;$$

on est ainsi conduit à considérer

$$I_p = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^p \varphi \, d\varphi$$

(c'est ce qu'on fait quand on démontre la formule de Wallis).

On voit facilement que :

1° I_p diminue quand p augmente ;

$$2^\circ \quad I_p = \frac{p-1}{p} I_{p-2}.$$

Ceci permet de calculer I_p en remarquant que $I_1 = 2$, $I_0 = \pi$; ensuite de conclure que

$$I_p I_{p-1} = \frac{2\pi}{p},$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{I_p}{I_{p-1}} = 1,$$

et finalement

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p I_p^2 = 2\pi.$$

Il reste pour achever à remplacer p par $2m^2 + 1$.

J'appelle A l'intégrale proposée. ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, il faut montrer que, à partir d'une certaine valeur de m , la différence entre A et J_m est inférieure à ε .

Il existe un nombre positif a tel que

$$A = \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx + \frac{\varepsilon}{2};$$

je vais faire grandir m en le prenant plus grand que a .

$\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2}$, quand $m(\geq x)$ grandit, va évidemment en croissant, et l'on sait qu'il tend vers e^{-x^2} , donc,

$$\left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} < e^{-x^2} \quad (m \geq x).$$

Par suite,

$$\int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx < J_m < \int_{-m}^{+m} e^{-x^2} dx < A;$$

et

$$\int_{-a}^{+a} \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} dx < J_m < \int_{-a}^{+a} e^{-x^2} dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il suffit de montrer que l'on a, à partir de m suffisamment grand,

$$\int_{-a}^{+a} \left[e^{-x^2} - \left(1 - \frac{x^2}{m^2}\right)^{m^2} \right] dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En développant la fonction sous le signe $\int$ suivant les puissances ascendantes de x , on trouve une série alternée; on augmente sa valeur d'abord en prenant la série des valeurs absolues, ensuite en remplaçant x par a : elle devient alors

$$e^{a^2} - \left(1 + \frac{a^2}{m^2}\right)^{m^2}.$$

Il suffit de prendre m assez grand pour que

$$e^{a^2} - \left(1 + \frac{a^2}{m^2}\right)^{m^2} < \frac{\varepsilon}{a},$$

ce qui est possible, puisque le premier membre a pour limite zéro.
