

L. DUNOYER

Sur les courbes de poursuite d'un cercle

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 193-222

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

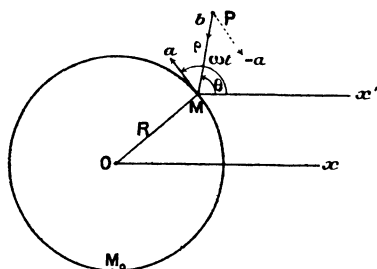
[H1h, R1a]

SUR LES COURBES DE POURSUITE D'UN CERCLE;

PAR M. L. DUNOYER.

1. Je me propose d'étudier le mouvement relatif de deux points dont l'un décrit un cercle d'un mouvement uniforme et dont l'autre est animé d'une vitesse constamment dirigée vers le premier point et de grandeur constante. Ce problème correspond au cas où un navire, dont l'appareil à gouverner serait immobilisé sous un

Fig. 1.



angle de barre fixe, serait poursuivi par un autre qui chercherait à l'aborder ou à l'éperonner en mettant constamment le cap sur son adversaire. Nous supposons d'abord que les navires sont des points et nous verrons ensuite dans quelle mesure les dimensions des deux navires modifient les résultats.

Le mouvement relatif des deux points dépend d'une équation différentielle du premier ordre dont il s'agira d'étudier les intégrales dans le domaine réel. Formons d'abord cette équation.

Le point M (*fig. 1*) décrit le cercle O d'un mouvement uniforme; sa vitesse angulaire est

$$\omega = \frac{a}{R}.$$

Le point P a une vitesse toujours dirigée vers M; elle est constante en grandeur et égale à b .

Nous supposons que M et P partent de positions initiales données et que l'axe Ox soit parallèle à la tangente au cercle au point M_0 . Par rapport à l'axe polaire de direction fixe Mx' , le mouvement relatif de M et de P est défini par les équations :

$$(1) \quad \begin{cases} MP = \rho, & \widehat{x'MP} = \theta, \\ \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\rho}{dt} = -b - a \cos(\omega t - \theta), \\ \rho \frac{d\theta}{dt} = -a \sin(\omega t - \theta). \end{array} \right. \end{cases}$$

Posons

$$\omega t - \theta = u$$

et éliminons ρ entre ces deux équations; nous obtenons l'équation différentielle

$$\begin{aligned} a \sin u \frac{d^2 u}{dt^2} - (b + 2a \cos u) \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \\ + (2b + 3a \cos u) \omega \frac{du}{dt} - (b + a \cos u) \omega^2 = 0. \end{aligned}$$

Comme t ne figure pas explicitement dans cette équation, nous la ramènerons au premier ordre en posant

$$\frac{du}{dt} = y, \quad \cos u = x, \quad \frac{b}{a} = c,$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} -y(1-x^2) \frac{dy}{dx} - (c+2x)y^2 \\ + (2c+3x)\omega y - (c+x)\omega^2 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$(2) \quad \frac{dx}{y(x^2-1)} = \frac{dy}{(y-\omega)(2xy-\omega x+c y-c\omega)}.$$

2. Cette équation est de la forme

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y},$$

X et Y étant deux polynomes en x et y du troisième degré. Par chaque point du plan des xy passe une intégrale holomorphe et une seule. Il ne peut y avoir exception que pour les points de rencontre des deux courbes

$$X = 0, \quad Y = 0;$$

ces points ont pour coordonnées :

$$\begin{array}{ll} N \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ y = \omega, \end{array} \right. & C \left\{ \begin{array}{l} x = 1, \\ y = \omega \frac{c+1}{c+2}, \end{array} \right. \\ N' \left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ y = \omega, \end{array} \right. & C' \left\{ \begin{array}{l} x = -1, \\ y = \omega \frac{c-1}{c-2}; \end{array} \right. \\ A \left\{ \begin{array}{l} x = -c, \\ y = 0, \end{array} \right. & v \left\{ \begin{array}{l} x = \pm \infty, \\ y = 0, \end{array} \right. & \gamma \left\{ \begin{array}{l} x = 0, \\ y = \pm \infty. \end{array} \right. \end{array}$$

Pour n'avoir pas de branches infinies nous projeterons le plan des xy sur une sphère tangente à ce plan au point $x = 0, y = 0$, le centre de la sphère étant le centre de projection.

Pour étudier la forme des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier, il suffit de transporter l'origine des coordonnées en ce point et d'appliquer le théorème suivant ⁽¹⁾ :

(1) Cf. PICARD, *Traité d'Analyse*, t. III.

Soient

$$X = ax + by + \dots,$$

$$Y = a'x + b'y + \dots,$$

λ_1 et λ_2 les deux racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Si λ_1 et λ_2 sont réels :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 0, \quad \text{le point est un nœud,}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0 : \quad \text{le point est un col.}$$

Si λ_1 et λ_2 sont imaginaires :

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{ imaginaire :} \quad \text{le point est un foyer,}$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{le point est généralement un foyer,} \\ \text{quelquefois un centre.} \end{array} \right.$$

Le cas où le point singulier considéré serait un centre est un cas très particulier, dans lequel une certaine infinité de coefficients qu'il faudrait calculer pour trouver une série convergente $F(x, y)$ ordonnée suivant les puissances croissantes de x et de y satisfaisant à l'équation

$$X \frac{\partial F}{\partial x} + Y \frac{\partial F}{\partial y} = 0,$$

seraient tous nuls. Nous verrons d'ailleurs que, dans le cas actuel, cette circonstance ne peut se présenter.

L'application de ce théorème ne présente aucune difficulté pour les points N , C , N' , C' et A ; elle fournit les résultats suivants :

Pour N.....	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$	nœud
» C.....	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -2 \frac{c+1}{c+2}$	col
» N'.....	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2$	nœud
» C'.....	$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -2 \frac{c-1}{c-2}$	$\left\{ \begin{array}{ll} 0 < c < 1 & \text{col} \\ 1 < c < 2 & \text{nœud} \\ 2 < c & \text{col} \end{array} \right.$

Pour le point A, λ_1 et λ_2 sont les racines de l'équation

$$\lambda^2 - c\omega\lambda - \omega^2(c^2 - 1) = 0;$$

donc

$$c < \frac{2}{\sqrt{5}}: \quad \text{foyer,}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} < c < 1, \quad \text{nœud,}$$

$$1 < c: \quad \text{col.}$$

Comme $c\omega$ est toujours différent de zéro, on ne peut jamais avoir de centre.

Pour les points ν , ν' , γ et γ' , l'application du théorème invoqué ne peut pas être immédiate, car chacun de ces points est un point double pour l'une ou l'autre des courbes $X=0$, $Y=0$. Pour ramener ce cas au précédent, il suffit de déformer légèrement une des branches de la courbe qui admet le point étudié comme point double et de voir ce qui se passe à la limite.

Pour étudier les points γ et γ' , nous remplacerons donc l'hyperbole

$$2xy - \omega x + cy - c\omega = 0$$

par l'hyperbole

$$2(x + \alpha y)y - \omega x + cy - c\omega = 0,$$

α étant une quantité très petite que nous ferons tendre

vers zéro. Cette hyperbole coupe le grand cercle $x = 1$ au point

$$x = 1, \quad y = \frac{-(c+2) - \sqrt{(c+2)^2 + 8\omega(c+1)\alpha}}{4\alpha}$$

qui tend vers l'équateur quand α tend vers zéro. Portons l'origine en ce point

$$x = x' + 1, \\ y = y' - \frac{c+2 + \sqrt{(c+2)^2 + 8\omega(c+1)\alpha}}{4\alpha};$$

l'équation devient

$$\frac{dx'}{\frac{c+2 + \sqrt{(c+2)^2 + 8\omega(c+1)\alpha}}{2\alpha} x' + \dots} \\ = \frac{dy'}{\left\{ a'x' + \left[-\frac{c+2+\sqrt{\dots}}{2\alpha} + \frac{(c+2+\sqrt{\dots})^2}{8\alpha} - \omega - c\frac{c+2+\sqrt{\dots}}{4\alpha} \right. \right.} \\ \left. \left. - c\omega - \left(\frac{c+2+\sqrt{\dots}}{4\alpha} + \omega \right) [2 - (c+2+\sqrt{\dots}) + c] \right] y' + \dots \right\}}$$

Les termes en dehors des radicaux sont du second degré au moins; il est inutile de calculer le coefficient de x' ; les deux racines de l'équation en λ sont, en effet,

$$\lambda_1 = -\frac{c+2 + \sqrt{(c+2)^2 + 8\omega(c+1)\alpha}}{2\alpha}, \\ \lambda_2 = \frac{3[c+2 + \sqrt{(c+2)^2 + 8\omega(c+1)\alpha}]^2}{8\alpha} \\ - \frac{c+2 + \sqrt{\dots}}{2\alpha} (c+2 - 2\omega\alpha) - \omega(2c+3).$$

Mettons le radical sous la forme

$$(c+2) \sqrt{1 + 8\omega \frac{c+1}{(c+2)^2} \alpha} = c+2 + 4\omega \frac{c+1}{c+2} \alpha + \dots$$

Nous obtenons pour λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = -\frac{c+2}{\alpha} + A + B\alpha + \dots,$$

$$\lambda_2 = \frac{(c+2)^2}{\alpha} + A' + B'\alpha + \dots$$

Pour les valeurs très petites de α , le rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ est très voisin de

$$-\frac{1}{c+2},$$

ce qui correspond à un col.

Il faut voir maintenant quelle est la nature du point de rencontre, voisin de l'équateur pour les petites valeurs de α , de l'hyperbole

$$2(x + \alpha y)y - \omega x + cy - c\omega = 0$$

avec le grand cercle $x = -1$. Ce point a pour coordonnées

$$x = -1,$$

$$y = \frac{-(c-2) - \sqrt{(c-2)^2 + 8\omega(c-1)\alpha}}{4\alpha}.$$

Un calcul tout à fait semblable au précédent fournit les valeurs suivantes de λ_1 et λ_2 :

$$\lambda_1 = \frac{c-2}{\alpha} + A_1 + B_1\alpha + \dots,$$

$$\lambda_2 = \frac{(c-2)^2}{\alpha} + A'_1 + B'_1\alpha + \dots,$$

ce qui correspond

si $c < 2$ à un col;

si $c > 2$ à un nœud.

Il résulte de là que

si $c < 2$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{les points } \gamma \text{ et } \gamma' \text{ sont la superposition} \\ \text{de deux cols;} \end{array} \right.$

et

si $c > 2$ } ces points sont la superposition d'un
col et d'un nœud.

Dans le premier cas, les seules intégrales passant par les points γ et γ' sont l'équateur (limite commune de deux des intégrales passant par les cols composants) et les deux grands cercles $x = -1$, $x = +1$.

Dans le second, il passe par les points γ et γ' une infinité d'intégrales ⁽¹⁾.

En ce qui concerne les points ν et ν' , nous pouvons remarquer que leur étude n'est pas nécessaire au problème posé, car le champ qui intéresse ce problème est celui qui est compris entre les grands cercles $x = \pm 1$. Toutefois, la même méthode que ci-dessus montre que les points ν et ν' sont toujours des nœuds.

3. Examinons maintenant comment les caractéristiques ou courbes intégrales aboutissent aux nœuds.

En portant l'origine au nœud N' , par exemple, l'équation devient

$$\frac{dx'}{2x' + \dots} = \frac{dy'}{y' + \dots} = \frac{dv}{v} \quad \left(\begin{array}{l} x = x' - 1 \\ y = y' + \omega \end{array} \right).$$

On sait qu'il existe des développements de x' et de y' suivant les puissances croissantes de $c\nu^2$ et de $c_1\nu$ respectivement, convergents dans un certain intervalle; soient

$$x' = c\nu^2 + \dots,$$

$$y' = c_1\nu + \dots$$

⁽¹⁾ La méthode qui vient d'être employée est évidemment générale. En fait, pour les points γ et γ' , on arrive plus rapidement au résultat en faisant la transformation $x = x' \pm 1$, $y = \frac{1}{z}$; ce procédé direct réussit ici parce qu'on peut séparer les deux branches de la courbe $X = 0$ qui passent par le point étudié.

ces développements. Il en résulte que toutes les caractéristiques sont tangentes au grand cercle $x = -1$, qui est lui-même une caractéristique. Une seule fait exception, c'est le grand cercle

$$y' = 0,$$

ou

$$y = \omega.$$

Il en est de même pour les caractéristiques qui aboutissent au nœud N sur le grand cercle $x = 1$.

Quand c est compris entre 1 et 2, le point c' est un nœud. Posons

$$x = x' - 1,$$

$$y = y' + \omega \frac{c-1}{c-2};$$

l'équation devient

$$\frac{dx'}{-2\omega \frac{c-1}{c-2} x' + \dots} = \frac{dy'}{(\frac{c\omega^2}{c-2})^2 x' + \omega y' + \dots}$$

et l'on a

$$\lambda_1 = -2\omega \frac{c-1}{c-2}, \quad \lambda_2 = \omega, \quad \alpha' = \frac{c\omega^2}{(c-2)^2}.$$

Pour ramener l'équation à la forme

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \dots} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1 + \dots},$$

posons

$$x_1 = \alpha x' + \beta y',$$

$$y_1 = \alpha' x' + \beta' y'.$$

Si F est une série convergente satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$X \frac{\partial F}{\partial x'} + Y \frac{\partial F}{\partial y'} = 0,$$

on doit avoir

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 x' + \dots) \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \alpha + \frac{\partial F}{\partial y_1} \alpha' \right) \\ & + (\alpha' x' + \lambda_2 y' + \dots) \left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \beta + \frac{\partial F}{\partial y_1} \beta' \right) \\ & \equiv (\lambda_1 x_1 + \dots) \frac{\partial F}{\partial x_1} + (\lambda_2 y_1 + \dots) \frac{\partial F}{\partial y_1}, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \lambda_1 \alpha x' + (\alpha' x' + \lambda_2 y') \beta &= \lambda_1 (\alpha x' + \beta y'), \\ \lambda_1 \alpha' x' + (\alpha' x' + \lambda_2 y') \beta' &= \lambda_2 (\alpha' x' + \beta' y'); \end{aligned}$$

d'où

$$\beta = 0, \quad (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha' = \alpha' \beta',$$

et, si l'on veut,

$$\alpha = 1, \quad \beta' = 1;$$

de sorte que l'on a

$$\begin{aligned} x_1 &= x', \\ y_1 &= \frac{\alpha'}{\lambda_2 - \lambda_1} x' + y', \end{aligned}$$

et l'équation devient

$$\begin{aligned} & dx_1 \left(\alpha' x_1 - \lambda_2 \frac{\alpha'}{\lambda_2 - \lambda_1} x_1 + \lambda_2 y_1 + \dots \right) \\ & = \left(dy_1 - \frac{\alpha'}{\lambda_2 - \lambda_1} dx_1 \right) (\lambda_1 x_1 + \dots) \end{aligned}$$

ou

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \dots} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1 + \dots} = \frac{dv}{v}.$$

On a donc pour x_1 et y_1 des développements convergents de la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= k v^{\lambda_1} + \dots, \\ y_1 &= k' v^{\lambda_2} + \dots; \end{aligned}$$

d'où

$$y' = k' v^{\omega} + \dots - \frac{c \omega}{(c-2)(3c-4)} \left(k v^{-2\omega \frac{c-1}{c-2}} + \dots \right),$$

$$x' = k v^{-2\omega \frac{c-1}{c-2}} + \dots$$

Si donc

$$\omega > -2\omega \frac{c-1}{c-2} \quad \text{ou} \quad c < \frac{4}{3},$$

la tangente à une caractéristique, au nœud c' , d'ailleurs variable avec les constantes k et k' , sera distincte du grand cercle $x = -1$.

Si, au contraire,

$$\frac{4}{3} < c < 2,$$

la tangente à toutes les caractéristiques sera le grand cercle $x = -1$.

Quand $c = \frac{4}{3}$, on a $\lambda_1 = \lambda_2$; on sait alors que les intégrales du système

$$\frac{dx'}{x' + \dots} = \frac{dy'}{\frac{c \omega}{(c-2)^2} x' + y' + \dots} = \frac{dv}{v}$$

se présentent sous forme de développements ordonnés suivant les puissances croissantes de v et de $v \log v$:

$\frac{y'}{x'}$ tend donc vers $\pm \infty$ quand u tend vers 0.

Dans le cas où c est plus grand que 2, les points γ et γ' sont des nœuds. Il nous sera encore nécessaire de connaître les développements représentant les intégrales dans le voisinage de ces nœuds.

En posant $y = \frac{1}{z}$, l'équation devient

$$\frac{dx}{(x^2-1)} = \frac{-dz}{z(1-\omega z)(-\omega x z + 2x - c \omega z + c)}.$$

Par le point $x = \alpha$, ($\alpha^2 \neq 1$), $z = 0$ passe donc une intégrale représentée par le développement

$$z = A(x - \alpha)^2 + \dots;$$

d'où

$$y = \frac{1}{A(x - \alpha)^2 + \dots},$$

les termes non écrits étant des puissances supérieures de $x - \alpha$.

Si $\alpha = -1$, en faisant la substitution $x = x' - 1$, l'équation devient

$$\frac{dx'}{-x'(x' - 2)} = \frac{dz}{(c - 2)z + \dots}.$$

Le point $x' = 0$, $z = 0$ est donc un nœud; au contraire, le point $x = 1$, $z = 0$ qui fournirait l'équation

$$\frac{dx'}{-x'(x' + 2)} = \frac{dz}{(c + 2)z + \dots},$$

est un col par où passent les grands cercles $z = 0$ et $x = 1$ ⁽¹⁾.

Dans le voisinage du nœud on peut développer les intégrales sous la forme

$$\begin{aligned} x' &= hu^2 + \dots, \\ z &= k'u^{c-2} + \dots \end{aligned}$$

ou

$$y = \frac{1}{k'u^{c-2} + \dots}.$$

Reste enfin l'étude des intégrales au voisinage du point $A(x = -c, y = 0)$ quand ce point est un nœud $\left(1 > c > \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$.

En transportant l'origine en ce point, l'équation

(1) Voir plus haut

devient

$$\frac{dx'}{(c^2-1)y+\dots} = \frac{dy}{\omega^2 x' + c\omega y + \dots} \quad (x' = x + c).$$

Pour ramener l'équation à la forme

$$\frac{dx_1}{\lambda_1 x_1 + \dots} = \frac{dy_1}{\lambda_2 y_1 + \dots} \quad \left(\begin{array}{l} \lambda_1 = \omega \frac{c - \sqrt{5c^2 - 4}}{2} \\ \lambda_2 = \omega \frac{c + \sqrt{5c^2 - 4}}{2} \end{array} \right),$$

il suffit d'appliquer la méthode déjà employée. On pose

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha x' + \beta y, \\ y_1 &= \alpha' x' + \beta' y, \end{aligned}$$

et l'on a, pour déterminer α , β , α' , β' , les équations

$$\begin{aligned} \omega^2 \beta &= \alpha \lambda_1, & \omega^2 \beta' &= \alpha' \lambda_2, \\ (c^2 - 1)\alpha + c\omega\beta &= \lambda_1 \beta, & (c^2 - 1)\alpha' + c\omega\beta' &= \lambda_2 \beta'; \end{aligned}$$

λ_1 et λ_2 étant les racines de l'équation

$$\lambda^2 - c\omega\lambda - \omega^2(c^2 - 1) = 0,$$

dans chaque groupe, les secondes équations sont une conséquence des premières. On pourra donc prendre

$$\alpha = \omega^2, \quad \beta = \lambda_1, \quad \alpha' = \omega^2, \quad \beta' = \lambda_2,$$

et l'on a

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\lambda_1 y_1 - \lambda_2 x_1}{\omega^2(\lambda_1 - \lambda_2)}, & y &= \frac{x_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2}, \\ \frac{(\lambda_1 dy_1 - \lambda_2 dx_1)}{\omega^2(\lambda_1 - \lambda_2)} &\left(\frac{\lambda_1 y_1 - \lambda_2 x_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + c\omega \frac{x_1 - x_2}{\lambda_1 - \lambda_2} + \dots \right) \\ &= \frac{dx_1 - dy_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \left((c^2 - 1) \frac{x_1 - y_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \dots \right), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} &\frac{dx_1}{[-\lambda_1 \lambda_2 + c\omega \lambda_1 + \omega^2(c^2 - 1)]x_1 + \dots} \\ &= \frac{dy_1}{[-\omega^2(c^2 - 1) + \lambda_1 \lambda_2 - \lambda_2 c\omega]y_1 + \dots}. \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} & \frac{dx_1}{(-\sqrt{5c^2-4}+c)x_1+\dots} \\ &= \frac{dy_1}{+(\sqrt{5c^2-4}+c)y_1+\dots} = \frac{du}{u}, \end{aligned}$$

d'où l'on conclut que x_1 et y_1 peuvent se développer suivant les puissances de $u^{-\sqrt{5c^2-4}+c}$ et de $u^{\sqrt{5c^2-4}+c}$:

$$\begin{aligned} x_1 &= K u^{-\sqrt{5c^2-4}+c} + \dots, \\ y_1 &= K' u^{+\sqrt{5c^2-4}+c} + \dots, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\left\{ \begin{array}{l} (c - \sqrt{5c^2-4})(K' u^{+\sqrt{5c^2-4}+c} + \dots) \\ - (c + \sqrt{5c^2-4})(K u^{-\sqrt{5c^2-4}+c} + \dots) \end{array} \right\}}{-2\omega^2 \sqrt{5c^2-4}}, \\ y &= \frac{K u^{-\sqrt{5c^2-4}+c} + \dots - K' u^{+\sqrt{5c^2-4}+c} - \dots}{-\omega \sqrt{5c^2-4}}, \end{aligned}$$

x' et y sont donc du même ordre infinitésimal, de sorte que l'on a, dans le voisinage du point F,

$$y = A(x+c) + \dots \quad \left(A = \frac{-2\omega}{c + \sqrt{5c^2-4}} \right).$$

Il resterait enfin à examiner s'il y a autour du point F (noeud ou foyer) un cycle limite. Je n'ai pas encore résolu cette question; nous verrons dans quelle mesure intervient l'existence ou la non-existence de ce cycle limite.

4. Connaissant les points singuliers du système des caractéristiques, il nous suffirait encore de connaître le système topographique des cycles sans contact pour pouvoir tracer complètement le système des caractéristiques. On sait en effet qu'il existe toujours un tel sys-

tème topographique de cycles et de polycycles sans contact dont les fonds et les sommets sont les nœuds et les foyers du système des caractéristiques, et dont les cols sont les cols de ce système ⁽¹⁾.

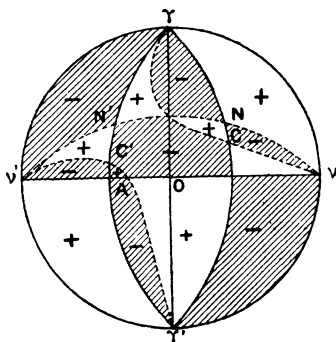
Sans connaître l'équation du système des cycles sans contact, il est possible dans le cas présent de prévoir la forme des caractéristiques en s'appuyant sur la propriété qui vient d'être rappelée et en se servant du tracé des courbes

$$X = 0, \quad Y = 0.$$

En tout point de la première la tangente à la caractéristique passant par ce point est parallèle à l'axe des y et en tout point de la seconde la tangente est parallèle à l'axe des x , les points singuliers qui sont à la fois sur ces deux courbes étant naturellement exclus.

Ces courbes, qui se composent (*fig. 2*), la première

Fig. 2.



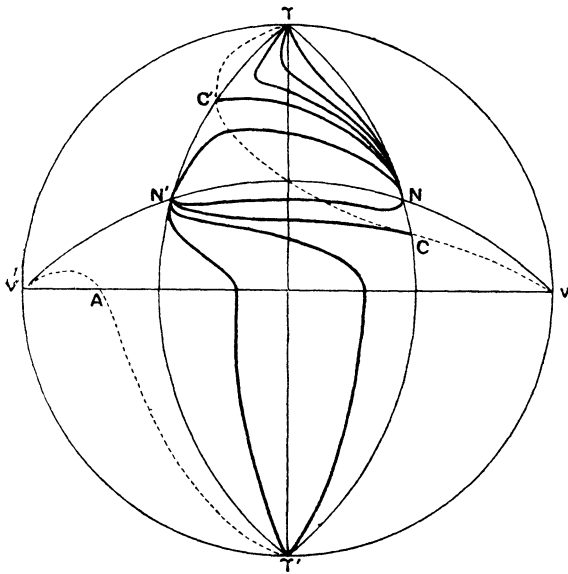
de l'axe des x et des grands cercles $x = \pm 1$ et la seconde du grand cercle $y = \omega$ et de l'hyperbole $2xy - \omega x + cy - c\omega = 0$, partagent la sphère en

⁽¹⁾ Cf. H. POINCARÉ, *Journal de Liouville*, t. VIII, 1882.

régions dans chacune desquelles $\frac{dy}{dx}$ a toujours le même signe. Dans la figure ci-jointe les régions marquées + sont celles où $\frac{dy}{dx}$ est constamment positive et — celles où $\frac{dy}{dx}$ est négative. Suivant les valeurs de c nous aurons donc, pour le système des caractéristiques, dans le fuseau compris entre les deux cercles $x = \pm 1$, les figures suivantes :

1° $c > 2$ (fig. 3).

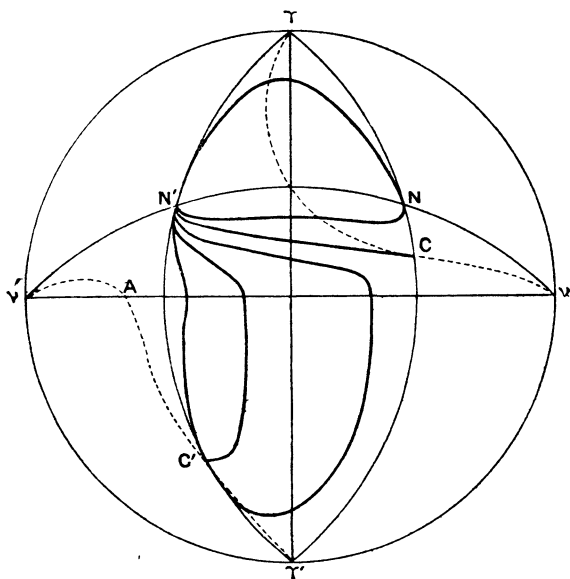
Fig. 3.



2° $2 > c > 1$. — Si $c > \frac{4}{3}$ (fig. 4), toutes les caractéristiques sont tangentes au grand cercle $x = 1$ au point C'.

3° $1 > c > \frac{2}{\sqrt{5}}$. — La figure 5 est faite en supposant

Fig. 4.



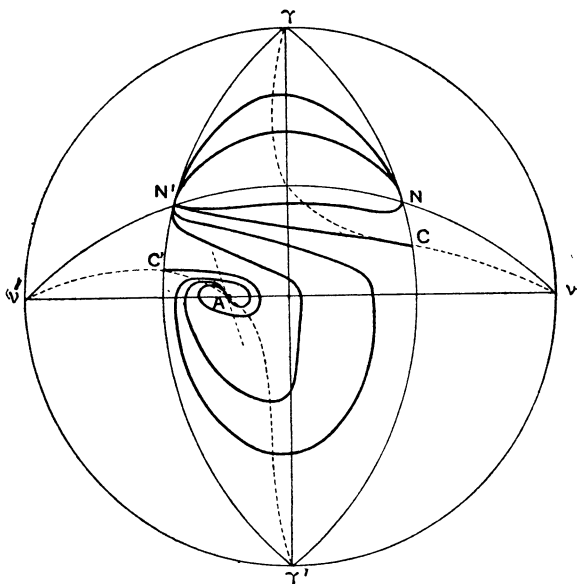
qu'il n'y a pas de cycle limite autour du nœud A. En ce point toutes les caractéristiques sont tangentes à la droite ayant pour coefficient angulaire $-\frac{2\omega}{c + \sqrt{5c^2 - 4}}$, comprise par conséquent entre la tangente à l'hyperbole, dont le coefficient angulaire est $-\frac{\omega}{c}$ et la droite $x = -c$.

4° $\frac{2}{\sqrt{5}} > c > 0$. — La figure 6 est faite en supposant que le foyer A n'est pas entouré d'un cycle limite.

La figure 7 représente le voisinage du point A quand il y a un cycle limite.

Remarque. — Quand $c < 1$ il ne peut y avoir de caractéristique joignant le nœud N et le col C' , ni C et C' , tandis qu'il y en a une joignant N' et C . En effet, les ordonnées des points C et C' sont $\omega \frac{c-1}{c-2}$ et $\omega \frac{c+1}{c+2}$; celle du point C' est donc toujours plus petite que celle

Fig. 5.



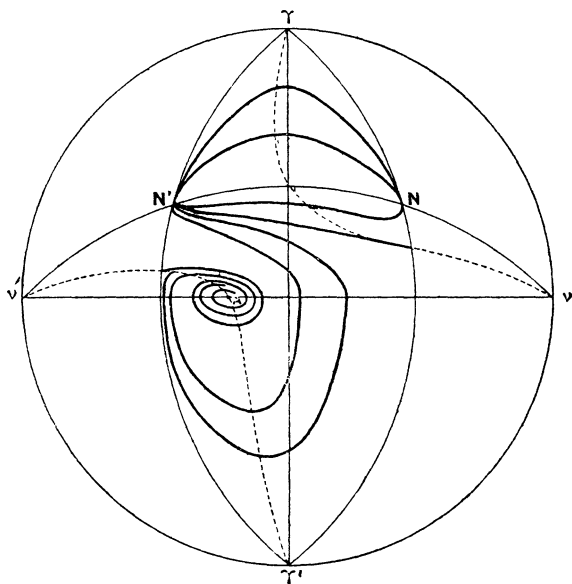
du point C . Il y aurait donc nécessairement, pour une caractéristique joignant N et C' ou C et C' , des points où l'on aurait $\frac{dy}{dx} > 0$ et qui seraient situés dans la région — comprise entre les grands cercles $x = \pm 1$, l'hyperbole $2xy - \omega x + cy - c\omega = 0$ et l'axe des x , ce qui est impossible.

§. Il faut maintenant interpréter ces résultats en se servant des variables ρ et θ .

Nous avons

$$\begin{aligned} \cos u &= x, & u &= \omega t - \theta, \\ \varphi &= \frac{a \sin u}{\gamma - \omega}, & dt &= \frac{-dx}{\gamma \sin u}. \end{aligned}$$

Fig. 6.



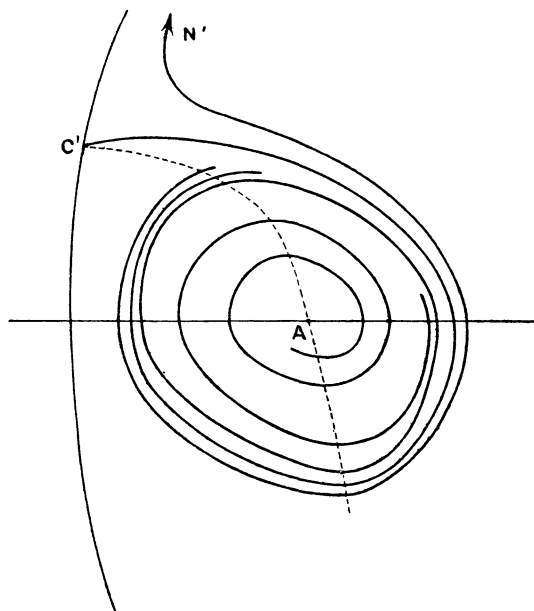
Soient θ_0 et φ_0 les valeurs initiales de θ et de φ ($t=0$); les valeurs correspondantes de x et de γ sont

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos \theta_0, \\ \gamma_0 &= \omega - \frac{a \sin \theta_0}{\varphi_0}. \end{aligned}$$

Il résulte de là que, à l'instant initial, la région du plan située au-dessous de la tangente M_0T (fig. 8) ($\pi < \theta_0 < 2\pi$) correspond à la région de la sphère comprise entre les grands cercles $x = \pm 1$ et au-dessus du

grand cercle $y = \omega$. La région située au-dessus de la tangente correspond à la région de la sphère située au-dessous de ce grand cercle.

Fig. 7.



Si $y_0 > \omega$, on a

$$\rho_0 = \frac{a \sqrt{1 - x_0^2}}{y_0 - \omega}.$$

Si $y_0 < \omega$, on a

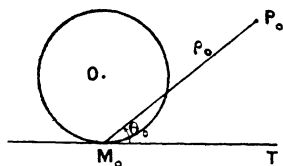
$$\rho_0 = \frac{-a \sqrt{1 - x_0^2}}{y_0 - \omega}.$$

D'autre part, le sens dans lequel il faut supposer qu'un mobile se déplace sur la caractéristique sphérique, à partir de la position initiale Q_0 , est déterminé par ce fait que dt doit être un accroissement positif du

temps. Si donc $y_0 > \omega$, le mouvement se fait de manière que x décroisse.

Si $\omega > y_0 > 0$, le sens du mouvement sur la carac-

Fig. 8.



téristique est celui de x croissant.

Si $y_0 < 0$, le sens du mouvement est celui de x décroissant.

Partant du point initial $Q_0(x_0, y_0)$ on arrive en un point de la caractéristique $Q(x, y)$ au bout du temps

$$t = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{y \sin u},$$

cette intégrale étant prise le long de la caractéristique.

La quantité sous le signe $\int$ ne devient infinie que lorsqu'on rencontre l'axe des x ou l'un des points N ou N' , C ou C' . De plus, pour les points γ et γ' , qui sont des nœuds quand $c > 2$, le dénominateur peut devenir de la forme $\infty \times 0$. Examinons ces différents cas.

Les caractéristiques étant toutes normales à l'axe des x , celle qui passe par le point $x = \alpha$, $y = 0$, $-1 < \alpha < 1$, $\alpha \neq -c$, a pour développement

$$y = A(x - \alpha)^{\frac{1}{2}} + A_1(x - \alpha)^{\frac{3}{2}} + \dots,$$

car ce point est un point ordinaire pour l'équation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{X}{Y}$$

et l'on a

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{\substack{x=\alpha \\ y=0}} = 0,$$

ce qui donne

$$x - \alpha = A' y^2 + A'_1 y^3 + \dots$$

Il résulte de là que, si x tend vers α en suivant un arc de caractéristique, l'intégrale

$$t = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{y \sin u}$$

tend vers une valeur finie.

De même, quand le point tend vers un des points N ou N', y tend vers ω et $\sin u$ tend vers zéro comme $\sqrt{1-x}$ ou $\sqrt{1+x}$, ce qui fait tendre l'intégrale vers une valeur finie. Il en est de même quand le point mobile tend vers un des points C ou C'.

Quand le point θ tend vers γ ou γ' , deux cas sont à distinguer suivant que la caractéristique suivie est asymptote au grand cercle $x = -1$ ou au grand cercle $x = \alpha$ ($-1 < \alpha < 1$). Dans le premier cas on a, pour les valeurs très grandes de $|y|$,

$$t = - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left(\frac{1}{k_1(x+1)^{\frac{c-2}{2}}} + \dots \right) (1-x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Comme $c > 2$, on a

$$\frac{3-c}{2} < 1,$$

et par conséquent l'intégrale tend vers une limite finie.

Dans le second cas on a

$$= - \int_{x_0}^x \frac{dx}{\left(\frac{A}{(x-\alpha)^2} + \dots \right) (1-x^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et l'intégrale a encore une limite finie.

Il reste enfin à voir ce que devient cette intégrale quand le point décrit un arc de caractéristique aboutissant au nœud A $\left(1 > c > \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. On a, comme nous l'avons vu,

$$y = A(x + c) + \dots \quad \left(A = \frac{-2\omega}{c + \sqrt{5c^2 - 4}}\right).$$

Il en résulte que, quand x tend vers $-c$, l'intégrale qui représente le temps devient infinie comme un logarithme. Dans toute la région étudiée de la sphère c'est le seul point où cette intégrale soit infinie.

Quant à la valeur de ρ , elle est finie en tout point du champ des caractéristiques, nulle aux cols C et C', indéterminée aux nœuds N et N'. Si l'on aboutit à l'un de ces nœuds en suivant la caractéristique

$$x \pm 1 = c\rho^2 + \dots,$$

$$y - \omega = c_1\rho + \dots,$$

ρ tend vers la limite

$$\rho = \pm \frac{a\sqrt{2}\sqrt{\pm c}}{c_1}.$$

On repartira du nœud sur la caractéristique située de l'autre côté du grand cercle $y = \omega$ en donnant à ρ la même valeur (même valeur du rapport $\frac{\sqrt{\pm c}}{c_1}$) et l'on pourra arriver au bout d'un certain temps à l'autre nœud. Je dis que ce sera avec une valeur de ρ nécessairement plus petite.

En effet, si le point P_0 est très éloigné du point M_0 , le point Q_0 sera très voisin du grand cercle $y = \omega$. Il est évident que le navire P se rapprochera constamment du centre du cercle décrit par le navire M, tant qu'il

n'aura pas pénétré dans ce cercle. La distance

$$\rho' = \sqrt{\rho^2 + R^2 \pm 2R\rho \sin u} = a \sqrt{\frac{1-x^2}{(y-\omega)^2} + \frac{1}{\omega^2} \pm \frac{2(1-x^2)}{\omega(y-\omega)}}$$

doit donc toujours diminuer. Le signe + correspond au cas où $y - \omega > 0$ et le signe - au cas où $y - \omega < 0$, comme il est facile de s'en assurer. Si partant d'un certain point d'abscisse x on arrive, en suivant une caractéristique joignant N et N' au point d'abscisse $-x$ du même côté du cercle $y - \omega = 0$, il en résulte que la valeur absolue de $y - \omega$ doit être plus grande pour ce second point que pour le premier.

Nous rencontrons donc ce fait assez curieux que *le point Q, partant de N sur une certaine caractéristique, arrive en N' sur un arc de caractéristique tel qu'en revenant en N l'arc de caractéristique suivi ne soit pas le même qu'au départ.* Le second arc de caractéristique suivi de N en N' est situé au-dessus du premier et le second arc suivi de N' en N est situé au-dessous du premier.

Remarquons pour ce qui suivra que l'on a

$$\frac{d\rho}{dx} = \frac{a(x+c)}{y \sin u}.$$

En ce qui concerne θ , on a

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dx} = \left(\omega - \frac{du}{dt} \right) \frac{dt}{dx};$$

or

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{1}{y \sin u},$$

donc

$$\frac{d\theta}{dx} = - \frac{\omega}{y \sin u} + \frac{1}{\sin u} = \frac{y-\omega}{y \sin u} = \frac{a}{\rho y}.$$

Donc θ varie dans le même sens que x au-dessus de

l'axe des x et en sens contraire au-dessous de cet axe.

Il est maintenant facile d'indiquer quelles seront les circonstances qui se présenteront dans le mouvement des deux navires.

Si leur distance initiale est suffisamment grande le point Q sera voisin du grand cercle $y = \omega$. Le temps croissant, il arrivera sûrement que :

1° Si $c > 2$, le point Q décrira à partir du point N un arc situé au-dessus de la caractéristique NC' , ou à partir du point N' un arc situé au-dessous de la caractéristique $N'C$ (ou l'un de ces arcs de caractéristiques).

2° Si $c < 2$, le point Q décrira à partir de N' un arc situé au-dessous de la caractéristique $N'C$ (ou cet arc de caractéristique).

On peut donc toujours supposer la distance initiale grande :

1° $c > 2$. — Soit qu'on aboutisse en γ ou en γ' , soit qu'on aboutisse aux cols C ou C' , ρ tend vers zéro en un temps fini. *Il y a donc rencontre au bout d'un temps fini.*

2° $2 > c > 1$. — On peut aboutir soit en C , soit en C' . Dans les deux cas la conclusion est la même que la précédente.

Ces deux cas correspondent à une trajectoire (dans le mouvement relatif) ayant la forme suivante (*fig. 9*) :

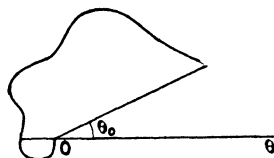
Le nombre des maxima et minima relatifs est fini; ils correspondent aux passages du point Q en N et N' puisque l'on a

$$\frac{d\rho}{d\theta} = a \frac{x+c}{y-w}$$

et que $x+c > 0$.

A partir du moment où l'on est sur une caractéristique constamment située au-dessus de NC' ou au-dessous de $N'C$, la trajectoire ne présente plus de maxima ou de minima pour ρ .

Fig. 9.



3° $1 > c$. — Il nous faut voir tout d'abord à quoi correspondrait l'existence d'un cycle limite, restée hypothétique dans ce cas et dans le suivant :

Les remarques qui ont été faites sur le sens dans lequel le point Q décrit les caractéristiques quand le temps croît constamment, montrent que ce point devrait décrire ce cycle indéfiniment, toujours dans le même sens (sens inverse du sens trigonométrique).

Ce cycle serait tout entier compris entre deux ellipses qui lui seraient tangentes

$$\rho_1^2 = \frac{\alpha^2(1-x^2)}{(\gamma-\omega)^2}, \quad \rho_2^2 = \frac{\alpha^2(1-x^2)}{(\gamma-\omega)^2}.$$

A ces deux ellipses correspondent deux cercles de rayons ρ_1 et ρ_2 , entre lesquels doit rester toujours comprise la trajectoire puisque tous les points intérieurs à la première ellipse, par exemple, correspondent à des valeurs de ρ plus grandes que ρ_1 . Ces valeurs sont atteintes pour $x = -c$, d'après la valeur de $\frac{d\rho}{d\theta}$.

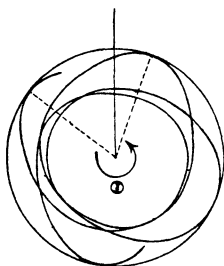
Chaque fois qu'on revient au même point du cycle limite, ρ reprend la même valeur et θ se trouve aug-

menté d'une quantité constante en vertu de la formule

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{a}{\rho y}.$$

La trajectoire de mouvement relatif correspondant au cycle limite est donc une courbe telle que celle-ci (*fig. 10*). Comme l'angle θ n'est généralement pas

Fig. 10.



commensurable avec π , cette trajectoire n'est pas fermée en général. Elle recouvre tout l'intervalle compris entre les deux cercles.

Les caractéristiques qui s'enroulent sur le cycle limite extérieurement correspondent à des trajectoires qui s'approchent indéfiniment de la trajectoire limite précédente, *en la coupant d'ailleurs une infinité de fois*. Les maxima du rayon vecteur ρ tendent vers ρ_1 par valeurs supérieures et les minima tendent vers ρ_2 par valeurs inférieures.

Au contraire, les caractéristiques qui s'enroulent autour du cycle limite intérieurement, correspondent à des trajectoires qui s'approchent indéfiniment de la trajectoire limite, mais telles que les maxima de leurs rayons vecteurs tendent vers ρ_1 par valeurs inférieures et les minima tendent vers ρ_2 par valeurs supérieures.

Quand on suit ces trajectoires dans l'autre sens (le

point Q sur les caractéristiques tend alors vers le point A, foyer ou nœud), elles s'approchent indéfiniment du cercle de rayon

$$\rho = \frac{a\sqrt{1-c^2}}{\omega},$$

qui correspond à l'ellipse

$$\frac{1-c^2}{\omega^2} = \frac{1-x^2}{(y-\omega)^2}$$

passant par le foyer F. Elles coupent d'ailleurs ce cercle une infinité de fois; elles tendent vers ce cercle en festonnant.

Les circonstances suivantes peuvent donc se produire :

Si la caractéristique suivie aboutit au col C, il y a choc au bout d'un temps fini. La trajectoire présente la même forme que lorsque $c > 1$.

Si la caractéristique n'aboutit pas au col C :

Ou bien il n'y a pas de cycle limite et la trajectoire se rapproche *indéfiniment* du cercle de rayon $\frac{a\sqrt{1-c^2}}{\omega}$ en festonnant sur ce cercle; *il n'y a jamais rencontre*;

Ou bien il y a un cycle limite; si, alors, le point Q_0 est en dehors de ce cycle, la trajectoire s'approche *indéfiniment* de la trajectoire limite; si le point Q_0 est à l'intérieur de ce cycle la trajectoire s'éloigne de cette trajectoire limite pour s'approcher indéfiniment du cercle de rayon $\frac{a\sqrt{1-c^2}}{\omega}$. Dans l'un et l'autre cas *il n'y aura jamais rencontre*.

En résumé, en ce qui concerne la rencontre :

1° $c > 1$. — Il y a toujours rencontre au bout d'un temps fini.

2° $c < 1$. — Il y a une infinité simple de chances contre une (infinité)² d'autres pour qu'il y ait rencontre au bout d'un temps fini (caractéristique aboutissant en C). Quand il n'y a pas rencontre la trajectoire relative du point poursuivant s'approche indéfiniment d'une trajectoire limite comprise entre deux cercles ou bien festonne autour d'un cercle compris entre ces deux-là en s'en approchant indéfiniment.

Si maintenant l'on tient compte des dimensions finies des navires on voit que :

Si $c > 2$, il y a toujours rencontre au bout d'un temps fini.

Si $c < 2$, il existe deux bandes de largeur égale à la somme des demi-dimensions des navires et dont les lignes moyennes sont les trajectoires qui correspondent aux caractéristiques passant par le col C ou le col C'. Ces bandes sont telles que, si la position initiale du navire P s'y trouve, il y aura rencontre au bout d'un temps fini. Pour une position initiale de P non comprise dans ces bandes il n'y aura jamais rencontre.

Remarques. — 1° Le cercle de rayon $\frac{a\sqrt{1-c^2}}{\omega}$ a une signification évidente. Supposons que la droite P_0M_0 (fig. 11) soit perpendiculaire à OP_0 et que l'on ait

$$OP_0 = Rc;$$

le point P décrira indéfiniment le cercle OP_0 . En effet, pendant le temps dt , le point M tourne de l'angle

$$d\alpha = \frac{a dt}{R}.$$

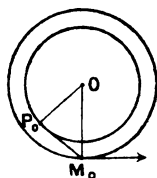
Pendant le même temps le point P_0 tourne de l'angle

$$\frac{b dt}{Rc} = \frac{a dt}{R}.$$

On a alors

$$P_0 M_0 = \sqrt{R^2 - R^2 c^2} = R \sqrt{1 - c^2} = \frac{a}{\omega} \sqrt{1 - c^2}.$$

Fig. 11.



2° Si le point Q_0 est très voisin du point $(c < 1)$ la distance initiale des deux navires est très petite. On voit cependant qu'elle ne s'annule jamais et reste toujours supérieure à une valeur fixe différente de zéro.

3° On voit par l'exemple qui vient d'être traité combien les circonstances que peuvent présenter les courbes limites d'un système d'intégrales d'une équation différentielle du second ordre, étudiées dans le domaine réel, sont plus compliquées que celles que présentent les cycles limites des systèmes de caractéristiques relatifs aux équations du premier ordre.