

LANDAU

Sur une inégalité de M. Hadamard

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 6
(1906), p. 135-140

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1906_4_6__135_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1906, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[D61β]

SUR UNE INÉGALITÉ DE M. HADAMARD;

PAR M. LANDAU.

Dans un travail récent *Sur les séries de la forme* $\sum a_n e^{-\lambda_n z}$, publié dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4^e série, t. IV, 1904, p. 529-533), M. Hadamard a développé quelques inégalités, qui, suivant son expression, « peuvent avoir leur utilité ». Je vais confirmer, dans les pages suivantes, cette attente de M. Hadamard, en en faisant une petite application à la théorie de la fonction $\zeta(z)$ de Riemann. En combinant les anciennes méthodes avec une de ses nouvelles relations, je parviendrai à prouver le théorème suivant :

Il existe une constante positive α telle que, pour tous les $q > 0$,

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1+\log^6 q}.$$

En d'autres termes, la limite inférieure d'indétermination, pour $q = \infty$, du produit

$$\log^6 q \, |\zeta(1 + qi)|$$

est supérieure à 0.

Jusqu'ici, on ne connaissait que l'inégalité un peu moins précise

$$\liminf_{q=\infty} \log^7 q \, |\zeta(1 + qi)| > 0,$$

démontrée par moi, comme proposition auxiliaire, par exemple dans mon travail *Neuer Beweis des Primzahlsatzes und Beweis des Primidealsatzes* [*Mathematische Annalen*, t. LVI, 1903, p. 654, formule (19)].

Je commence par refaire, dans un cas spécial, un raisonnement général de M. Hadamard. Soit

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z}$$

une série de Dirichlet, dont les coefficients a_n sont tous ≥ 0 et qui converge pour $R(z) > 1$. Soient $\varepsilon > 0$, q réel; on aura

$$F(1 + \varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

$$F(1 + \varepsilon + qi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon+qi}},$$

$$R F(1 + \varepsilon + qi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \cos(q \log n),$$

et pareillement

$$R F(1 + \varepsilon + 2qi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \cos(2q \log n).$$

Donc, en posant

$$(1) \quad \begin{cases} F(1+\varepsilon) &= R_0, \\ R F(1+\varepsilon+qi) &= R_1, \\ R F(1+\varepsilon+2qi) &= R_2, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\cos(q \log n) - \frac{R_1}{R_0} \right)^2 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\cos^2(q \log n) - \frac{2R_1}{R_0} \cos(q \log n) + \frac{R_1^2}{R_0^2} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2q \log n) - \frac{2R_1}{R_0} \cos(q \log n) + \frac{R_1^2}{R_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} R_0 + \frac{1}{2} R_2 - \frac{2R_1}{R_0} R_1 + \frac{R_1^2}{R_0^2} R_0 = \frac{1}{2} R_0 + \frac{1}{2} R_2 - \frac{R_1^2}{R_0}, \\ &\quad \frac{R_2}{R_0} \geq 2 \left(\frac{R_1}{R_0} \right)^2 - 1. \end{aligned}$$

C'est l'inégalité (3) du Mémoire de M. Hadamard, pour le cas spécial qui m'intéresse; elle donne

$$(2) \quad \begin{aligned} R_1^2 &\leq \frac{1}{2} R_0 (R_0 + R_2), \\ R_1 &\geq -\sqrt{\frac{1}{2} R_0 (R_0 + R_2)}. \end{aligned}$$

Je rappelle en outre les propositions connues (*voir* p. 649, 651 et 653 de mon Mémoire cité) :

$$(3) \quad \log \zeta(1+\varepsilon) < 1 + \log \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{pour} \quad 0 < \varepsilon \leq 1,$$

$$(4) \quad \left| \zeta(1+\varepsilon+2qi) \right| < 2 \log q \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pour} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad q \geq 10. \\ \text{pour} \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad q \geq 10. \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left| \zeta'(1+\varepsilon+qi) \right| < 6 \log^2 q$$

Je pose maintenant, pour $R(z) > 1$,

$$F(z) = \log \zeta(z) = - \sum_p \log \left(1 - \frac{1}{p^z} \right) = \sum_p \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \frac{1}{p^{mz}},$$

où p parcourt les nombres premiers; c'est une série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z},$$

où $a_n = \frac{1}{m}$ pour $n = p^m$ et $a_n = 0$ pour les n qui ne sont pas des puissances de nombres premiers. Tous les a_n étant ≥ 0 , on peut appliquer l'inégalité (2), en posant, d'après (1),

$$R_0 = \log \zeta(1 + \varepsilon),$$

$$R_1 = R \log \zeta(1 + \varepsilon + qi) = \log |\zeta(1 + \varepsilon + qi)|,$$

$$R_2 = R \log \zeta(1 + \varepsilon + 2qi) = \log |\zeta(1 + \varepsilon + 2qi)|.$$

On obtient, pour $\varepsilon > 0$, $q \geq 0$,

$$\log |\zeta(1 + \varepsilon + qi)|$$

$$\geq -\sqrt{\frac{1}{2} \log \zeta(1 + \varepsilon) (\log \zeta(1 + \varepsilon) + \log |\zeta(1 + \varepsilon + 2qi)|)},$$

d'où, en vertu de (3) et (4), pour $0 < \varepsilon \leq 1$, $q \geq 10$,

$$\log |\zeta(1 + \varepsilon + qi)|$$

$$\geq -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(1 + \log \frac{1}{\varepsilon} + 1 + \log \log q\right)},$$

$$(6) \quad |\zeta(1 + \varepsilon + qi)| \geq \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(2 + \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \log q\right)}}}.$$

D'autre part, pour $0 < \varepsilon \leq 1$, $q \geq 10$, (5) donne

$$|\zeta(1 + \varepsilon + qi) - \zeta(1 + qi)| = \left| \int_{1+qi}^{1+\varepsilon+qi} \zeta'(z) dz \right| < 6\varepsilon \log^2 q,$$

donc, en appliquant (6),

$$|\zeta(1 + qi)| = |\zeta(1 + \varepsilon + qi) - (\zeta(1 + \varepsilon + qi) - \zeta(1 + qi))|$$

$$\geq |\zeta(1 + \varepsilon + qi)| - |\zeta(1 + \varepsilon + qi) - \zeta(1 + qi)|$$

$$(7) \quad > \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \log \frac{1}{\varepsilon}\right) \left(2 + \log \frac{1}{\varepsilon} + \log \log q\right)}}} - 6\varepsilon \log^2 q.$$

Pour tout $q \geq 10$, je fais maintenant

$$\varepsilon = \frac{1}{e^{10} \log^8 q},$$

ce qui satisfait évidemment aux conditions $0 < \varepsilon \leq 1$.
J'obtiens, en vertu de (7),

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{1}{e^{\sqrt{\frac{1}{2}(11+8\log\log q)(12+9\log\log q)}}} - \frac{6}{e^{10}\log^6 q},$$

$$(8) \quad \log^6 q |\zeta(1+qi)| > \frac{\log^6 q}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+\log\log q\right)\left(\frac{4}{3}+\log\log q\right)}}} - \frac{6}{e^{10}}.$$

Or, en posant $\log\log q = y$,

$$\lim_{q=\infty} \frac{\log q}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+\log\log q\right)\left(\frac{4}{3}+\log\log q\right)}}} = \lim_{y=\infty} \frac{e^y}{e^{\sqrt{\left(\frac{11}{8}+y\right)\left(\frac{4}{3}+y\right)}}}$$

$$= e^{\lim_{y=\infty} \left[y - y \sqrt{\left(1+\frac{11}{8y}\right)\left(1+\frac{4}{3y}\right)} \right]} = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{8}+\frac{4}{3}\right)} = e^{-\frac{65}{48}}.$$

Le second membre de (8) tend donc, pour $q = \infty$, vers la limite positive

$$\beta = \left(e^{-\frac{65}{48}} \right)^6 - 6e^{-10} = e^{-\frac{65}{8}} - 6e^{-10} = e^{-10} \left(e^{\frac{15}{8}} - 6 \right).$$

Donc, pour tous les q suffisamment grands ($q \geq q_0$),

$$(9) \quad (1 + \log^6 q) |\zeta(1+qi)| > \log^6 q |\zeta(1+qi)| > \frac{\beta}{2};$$

d'autre part, $\zeta(z)$ étant différent de 0 pour $R(z) = 1$, le premier membre de (9) est, pour $0 < q < q_0$, supérieur à une constante positive; il existe donc une constante positive α telle qu'on ait, pour tous les $q > 0$,

$$(1 + \log^6 q) |\zeta(1+qi)| > \alpha,$$

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1 + \log^6 q},$$

ce qu'il fallait démontrer.

En vertu de l'identité

$$|\zeta(1+qi)| = |\zeta(1-qi)| \quad (q \geq 0),$$

on a, pour tous les $q \geq 0$,

$$|\zeta(1+qi)| > \frac{\alpha}{1 + \log^6 |q|}.$$

Dans tous ces développements, je ne me suis appuyé que sur les propriétés les plus élémentaires de la fonction $\zeta(z)$. Je ne me suis pas servi du théorème important de M. Hadamard (publié en 1893) sur l'existence et la densité des racines imaginaires de $\zeta(z)$, ni même du fait, découvert déjà par Riemann, que la fonction $\zeta(z)$ existe dans tout le plan.