NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

G. VIVANTI

Aperçu sur la théorie de l'équation du cinquième degré

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 5-36

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__5_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

[A4dα]

APERÇU SUR LA THÉORIE DE L'ÉQUATION DU CINQUIÈME DEGRÉ;

PAR M. G. VIVANTI.

Archiv der Mathematik und Physik, 3e série, Tome VIII, p. 53.

Traduit de l'allemand, avec l'autorisation de l'auteur, par M. A. BOULANGER.

1. *Introduction.* — Un des traits distinctifs de la Mathématique moderne est la connexion, la pénétration de ses diverses branches, et l'on peut citer comme exemple remarquable de ce fait la théorie de l'équation du cinquième degré, telle qu'elle se présente dans l'Ouvrage classique de F. Klein (1).

Dès que les recherches de Ruffini et d'Abel eurent démontré l'impossibilité d'exprimer les racines d'une

(1) *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Theorie der Gleichungen von fünften Grade.* Leipzig, Teubner, 1884. *Voir* aussi les *Lezioni sulla teoria della risoluzione delle equazioni di 5° grado*, de M. Vivanti (Messine, 1902, lithogr.).

équation générale du cinquième degré sous forme de fonctions algébriques explicites des coefficients, le désir naquit de représenter ces racines par des fonctions transcendantes, aussi simples que possible, des coefficients. La théorie des fonctions elliptiques, qui se développait à cette époque, en fournit le moyen : on trouva que les racines d'une équation générale du cinquième degré sont représentables par des fonctions modulaires elliptiques. Mais, comme les fonctions elliptiques dépendent d'un seul argument, tandis que l'équation générale du cinquième degré renferme cinq coefficients arbitraires, il est évidemment nécessaire de transformer cette équation en une autre qui ne contienne plus qu'un coefficient indéterminé, et l'on y parvient en deux étapes. Tout d'abord, on transforme l'équation générale [éq. (A)] en une *équation principale* [éq. (B)], débarrassée des termes du quatrième et du troisième degré : ceci s'obtient simplement par une extraction de racine carrée. En second lieu, on fait en sorte que les racines de cette équation (B), qui contient trois coefficients indéterminés, dépendent d'une manière connue de deux paramètres et des racines d'une équation à un seul coefficient arbitraire [éq. (C)]; ceci se réalise par des opérations purement algébriques, et l'on peut, si l'équation (A) ou l'équation (B) est donnée, déterminer algébriquement les valeurs correspondantes des deux paramètres et du coefficient de l'équation (C).

Il va de soi que l'équation (C) n'est pas résoluble algébriquement; c'est une équation du soixantième degré qui, pour des motifs qu'on indiquera plus loin, est dite *équation icosaédrique.* Sa résolution se fera au moyen des fonctions modulaires elliptiques.

Nous nous proposons de mettre en relief les points principaux de la théorie de l'équation du cinquième

degré, telle qu'elle vient d'être esquissée, en précisant toutes les notions utilisées, mais sans entrer dans le détail des calculs.

2. *Notions sur les groupes d'opérations.* — Étant donnée une classe d'éléments, d'espèce quelconque, on nomme *opération* tout mode de passage d'un élément à un autre. Le *produit* de plusieurs opérations est le résultat de la succession des passages correspondants. Si les opérations sont identiques, le produit s'appelle une *puissance*. Le produit des deux opérations S et T se désigne par ST, en observant bien que ST et TS ne coïncident pas nécessairement.

Soit un ensemble d'opérations tel que le produit de deux opérations quelconques de l'ensemble appartienne aussi à l'ensemble : on dit que cet ensemble forme un *groupe*. Tout *groupe fini*, c'est-à-dire composé d'un nombre fini d'opérations (nombre qu'on appelle l'*ordre* du groupe), possède les trois propriétés fondamentales suivantes :

1° Il contient l'*opération identique*, c'est-à-dire l'opération par laquelle on passe d'un élément quelconque à cet élément même (cette opération se désigne par S_0 ou par 1).

2° Il contient l'*opération inverse* de chacune de ses opérations, c'est-à-dire qu'à toute opération il en correspond une autre qui, exécutée à la suite de la première, détruit l'effet de celle-ci, leur produit se réduisant à l'opération identique.

3° Chacune de ses opérations est d'ordre fini, l'*ordre* d'une opération S étant le plus petit entier n pour lequel on ait

$$S^n = S_0.$$

Si S est une opération d'ordre n, les opérations

$$1, \quad S, \quad S^2, \quad \ldots, \quad S^{n-1}$$

forment un groupe dit *groupe cyclique*.

Si l'on représente par T^{-1} l'opération inverse de T, l'opération $T^{-1}ST$ se nomme la *transformée de* S *par* T; si, en particulier, $TS = ST$, auquel cas on dit que S et T sont *permutables,* on a

$$T^{-1}ST = S.$$

L'ensemble des transformées des opérations d'un groupe par une même opération forme aussi un groupe. Un groupe G étant donné, si l'on transforme l'ensemble des opérations d'un de ses *sous-groupes* I (c'est-à-dire d'un groupe I contenu dans G) par une même opération de G, on obtient un autre sous-groupe I′ de G, qui est dit *équivalent* à I et qui peut, en particulier, coïncider avec I. Si ce dernier cas se présente quand on procède à la transformation par chacune des opérations de G, on dit que I est un sous-groupe *distingué* ou *invariant* de G. Lorsqu'un groupe ne contient aucun sous-groupe distingué (à part lui-même et le groupe formé de la seule opération identique), on dit que ce groupe est *simple;* dans le cas contraire, on dit qu'il est *composé.*

Quand on peut associer à toute opération d'un groupe G une opération d'un autre groupe G′ de telle sorte que, S et S′, T et T′ étant des opérations correspondantes quelconques, ST et S′T′ se correspondent, on dit que G′ est *isomorphe* à G; cet isomorphisme est *holoédrique* ou *mériédrique* selon que les éléments de G′ correspondant à des éléments distincts de G sont entièrement distincts ou non.

Dans le second cas, le système des éléments de G,

auxquels correspond dans G′ l'opération identique, forme un sous-groupe invariant de G, dont l'ordre est le quotient des ordres des deux groupes. L'isomorphisme mériédrique ne peut dès lors se présenter que si G est composé.

3. *Groupes finis de substitutions linéaires.* — Les notions qu'on vient de présenter et dont la portée est considérable trouvent une application particulièrement importante pour nous dans la théorie des substitutions linéaires d'une variable complexe.

Une *substitution linéaire* est l'opération par laquelle on passe d'une valeur arbitraire z à une autre valeur z' liée à z par l'équation

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \tag{1}$$

où α, β, γ, δ sont des constantes réelles ou complexes satisfaisant à l'inégalité $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. La substitution (1) se désigne quelquefois par le symbole $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$.

$\alpha\delta - \beta\gamma$ s'appelle le *déterminant* de la substitution. L'opération inverse de la substitution linéaire (1), c'est-à-dire l'opération qui déduit z de z', est aussi une substitution linéaire; en effet

$$z = \frac{\delta z' - \beta}{-\gamma z' + \alpha}.$$

L'opération identique peut être regardée comme une substitution linéaire (1) où $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Le produit de deux substitutions linéaires est une substitution linéaire.

D'après ce qu'on a vu, il est clair que les substitutions linéaires forment un groupe (infini) qui possède les propriétés 1° et 2°.

Une substitution linéaire laisse inaltérées deux valeurs de z, distinctes ou confondues, qui sont les racines de l'équation du second degré

$$\gamma z^2 + (\delta - \alpha) z - \beta = 0,$$

et qui sont dites les *pôles* de la substitution [1].

Une substitution à deux pôles distincts p, q peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad \frac{z' - p}{z' - q} = \theta \frac{z - p}{z - q},$$

θ étant une constante. Si le module de la constante θ est l'unité, la substitution est dite *elliptique;* si θ est réelle, elle est dite *hyperbolique;* dans tous les autres cas, elle est dite *loxodromique*. La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution (2) soit d'ordre fini est que cette substitution soit elliptique et que θ soit une racine de l'unité.

Une substitution à pôle unique r est dite *parabolique;* elle peut être mise sous la forme

$$\frac{1}{z' - r} = \eta + \frac{1}{z - r},$$

η étant une constante. Une substitution parabolique ne saurait être d'ordre fini.

Il suit de là qu'un groupe fini ne peut être formé que de substitutions elliptiques à constantes θ racines de l'unité.

Il peut arriver que plusieurs substitutions d'un groupe fini aient un pôle commun; elles ont alors aussi le second pôle commun et forment un sous-groupe cyclique. Le sous-groupe transformé de celui-ci par une substitu-

---

[1] Exception faite de la substitution identique, pour laquelle toute valeur de z peut être regardée comme pôle.

tion T du groupe est aussi cyclique et admet pour pôles les valeurs en lesquelles les pôles précédents sont changés par la substitution T. Les pôles des deux sous-groupes équivalents sont dits *équivalents*.

Si n est l'ordre d'un groupe, et si p est un pôle commun à $(\nu - 1)$ substitutions du groupe (l'identité exceptée), ν est un diviseur de n et p appartient à un système de $\frac{n}{\nu}$ pôles équivalents. Entre n et les diverses valeurs $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r$ de ν, il existe la relation importante

$$\sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{\nu_i}\right) = 2 - \frac{2}{n}.$$

En s'appuyant sur cette relation, on peut déterminer de la manière la plus aisée tous les groupes finis *possibles* de substitutions linéaires. Tout d'abord on reconnaît que r ne peut prendre que les valeurs 2 ou 3. Ensuite on obtient comme seules solutions possibles de l'équation précédente les solutions indiquées dans le Tableau ci-après, où m et n désignent des entiers positifs arbitraires :

(3)

	r.	ν_1.	ν_2.	ν_3.	n.
I.....	2	n	n		n
II....	3	2	2	m	$2m$
III...	3	2	3	3	12
IV....	3	2	3	4	24
V....	3	2	3	5	60

4. *Représentation géométrique des substitutions linéaires sur le plan et sur la sphère. Groupes de rotations.* — Si l'on associe à tout nombre complexe

$z = x + iy$ le point de coordonnées cartésiennes x, y, la substitution

$$z' = f(z) \tag{4}$$

représente une *transformation du plan en lui-même*, c'est-à-dire une transformation qui fait correspondre à tout point du plan un autre point généralement distinct du premier. Quelle particularité cette transformation présente-t-elle quand la substitution (4) a la forme (1)?

Tout d'abord, en laissant de côté le cas de la substitution identique, il n'y a qu'un ou deux points qui se transforment en eux-mêmes : ce sont les pôles de la substitution. Bornons-nous au cas d'une substitution elliptique dont les pôles soient p et q. Étant alors donné un point arbitraire z, on peut déterminer un cercle unique passant par z, ayant son centre sur la droite pq, et par rapport auquel les points p et q soient conjugués; le point transformé z' se trouve sur ce cercle, et les segments de cercles pzq, $pz'q$ se rencontrent en p et q sous un angle constant (qui est l'argument de θ). Si, en particulier, un des pôles, par exemple q, est à l'infini, on obtient le cercle passant par z et ayant p pour centre, tandis que les segments de cercles susmentionnés deviennent les droites pz et pz'.

Mais on obtient la représentation la plus claire de cette transformation en passant du plan à la surface de la sphère. Si l'on choisit, en effet, d'une manière convenable, la sphère et le centre de projection, le système des cercles du plan, dont les centres sont sur pq et par rapport auxquels p et q sont conjugués, se transforme, par projection stéréographique [1], en un système de

[1] Une projection stéréographique est la perspective d'un plan sur une surface sphérique, le point de vue étant une extrémité du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan. Elle possède les

cercles parallèles dont les pôles sont les projections p' et q' des points p et q; une substitution linéaire sera alors représentée par une rotation de la sphère, ayant pour axe le diamètre $p'q'$ et pour amplitude l'argument de θ.

D'après cela, à chaque groupe de substitutions linéaires correspond un groupe de rotations d'une sphère sur elle-même. Mais, ce qu'il importe de remarquer, c'est que, à tous les groupes finis de substitutions reconnus *possibles,* correspondent des groupes de rotations *existant réellement.*

Considérons un polyèdre régulier et la sphère qui lui est circonscrite. Soient ab, cd deux arêtes quelconques du polyèdre : ab peut être amené, par une rotation de la sphère sur elle-même, en coïncidence avec cd ou avec dc. Toutes ces rotations, dont le nombre (en comprenant la rotation d'amplitude nulle qui laisse la figure immobile) est double du nombre des arêtes du polyèdre, superposent le polyèdre à lui-même; et aucune autre rotation ne possède la même propriété; elles forment évidemment un groupe. A chaque polyèdre régulier correspond ainsi un groupe de rotations. Mais les groupes obtenus ne sont pas tous distincts; car toute rotation qui superpose un polyèdre à lui-même superpose aussi à lui-même le polyèdre polaire, c'est-à-dire le polyèdre dont les sommets sont les centres sphériques des faces du premier. Par suite, aux polyèdres réguliers ne correspondent que trois groupes distincts, à savoir le *groupe tétraédrique,* le *groupe octaédrique* ou *hexaédrique* et le *groupe icosaédrique* ou *dodécaédrique.*

---

deux propriétés fondamentales suivantes :

1° La grandeur des angles est conservée par la projection;

2° Les cercles et les droites sont transformés en cercles.

Des groupes finis plus généraux de rotations s'obtiennent de la manière suivante.

On peut regarder un polygone régulier inscrit dans un grand cercle de la sphère comme un polyèdre régulier limité par deux plans superposés (*dièdre*); les rotations qui superposent cette figure à elle-même forment un groupe, le *groupe du dièdre*, dont l'ordre est double du nombre des côtés du polygone. Si, en particulier, le polygone se réduit à un diamètre, compté deux fois, du grand cercle, le groupe du dièdre correspondant est d'ordre 4 et s'appelle *Vierergruppe*.

Enfin, il y a encore des groupes de rotations tout simples, à savoir les *groupes cycliques*, engendrés par une rotation d'amplitude égale à un sous-multiple de 2π et par les puissances de cette rotation.

On peut établir que les groupes cycliques, les groupes du dièdre et les groupes tétraédrique, octaédrique et icosaédrique sont la représentation sphérique des groupes de substitutions I, II, III, IV et V du Tableau (3).

Tout d'abord, en effet, un groupe cyclique de rotations est formé de n rotations ayant les deux mêmes pôles, et chacun de ces pôles n'est équivalent qu'à lui-même; dès lors, on a

$$r = 2, \qquad \frac{n}{\nu_1} = 1, \qquad \frac{n}{\nu_2} = 1;$$

d'où

$$\nu_1 = \nu_2 = n$$

[*cf.* Tableau (3), I].

Considérons dorénavant, en même temps que chaque polyèdre régulier, la division déterminée sur la sphère circonscrite par les perspectives de ses arêtes vues du centre de la sphère, et appelons cette configuration un

polyèdre sphérique. Ainsi, par exemple, le *dièdre sphérique* a pour faces deux hémisphères, pour sommets m points équidistants répartis sur leur grand cercle commun; pour arêtes les m arcs en lesquels ce cercle sera partagé par les points choisis. Chaque rotation d'un groupe polyédrique superpose à lui-même le polyèdre sphérique correspondant.

Commençons par le dièdre; le groupe qui lui est relatif est formé des rotations suivantes : une rotation de $\frac{2\pi}{m}$ autour du diamètre perpendiculaire au plan du polygone et les puissances de cette rotation; m rotations de π autour des axes de symétrie du polygone. L'ordre du groupe est ainsi $n = 2m$, et l'on a trois sortes de pôles équivalents : les m sommets $\left(\frac{n}{\nu_1} = m\right)$, les points milieux des côtés $\left(\frac{n}{\nu_2} = m\right)$, les centres des deux faces $\left(\frac{n}{\nu_3} = 2\right)$. On a, par suite,

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 2, \qquad \nu_3 = m$$

[*cf.* Tableau (3), II].

Considérons maintenant à la fois le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre qui possèdent la propriété commune d'avoir pour faces des triangles égaux. Divisons chaque face du polyèdre sphérique correspondant par ses médianes en 6 triangles rectangles alternativement égaux et symétriques; comme 4 de ces triangles sont contigus à chaque arête, le nombre total de ces triangles est quadruple du nombre des arêtes, soit $2n$. Le nombre des faces est, par suite, $\frac{n}{3}$; il en résulte que l'on a respectivement, dans les trois cas, $n = 12, 24, 60$. De plus, d'après le théorème d'Euler relatif aux po-

lyèdres (¹), le nombre des sommets est $\frac{n+12}{6}$, soit 4, 6, 12, comme on le sait.

Chacun des triangles considérés a pour sommets le milieu d'une arête, le centre d'une face et un sommet du polyèdre sphérique; les angles correspondants sont $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{q}$, où $q = \frac{6n}{n+12}$, soit 3, 4, 5 (²).

Les rotations qui superposent le polyèdre à lui-même sont les mêmes que celles qui amènent un triangle quelconque en superposition avec tous les triangles égaux, soit :

1° La rotation nulle;

2° Les rotations d'amplitude π autour des diamètres

(¹) Si A, F, S sont les nombres des arêtes, des faces et des sommets d un polyèdre, le théorème d'Euler dit que

$$F + S = A + 2;$$

dans notre cas,

$$A = \frac{n}{2}, \qquad F = \frac{n}{3}; \qquad \text{donc} \qquad S = \frac{n}{2} - \frac{n}{3} + 2 = \frac{n+12}{6}.$$

(²) Autour du milieu d'une arête sont répartis 4 triangles et, autour du centre d'une face, 6 triangles; en sorte que les angles correspondants sont $\frac{2\pi}{4}$ et $\frac{2\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{3}$. Pour déterminer le troisième angle, nous appliquerons le théorème de Lhuillier d'après lequel la surface d'un triangle sphérique est égale à l'excès sur π de la somme de ses angles. La surface de la sphère étant décomposée en $2n$ triangles équivalents, si l'on désigne par $\frac{\pi}{q}$ l'angle à déterminer, on a

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{q} - \pi = \frac{4\pi}{2n}; \qquad \text{d'où} \qquad q = \frac{6n}{n+12}.$$

D'après cela, le nombre des sommets du polyèdre peut être représenté par $\frac{n}{q}$.

passant par les milieux des arêtes opposées deux à deux (*médianes*) : leur nombre est $\frac{n}{4}$ et les extrémités des axes de rotation forment $\frac{n}{2}$ pôles équivalents;

3° Les rotations d'amplitudes $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{4\pi}{3}$ autour des diamètres passant par les centres des faces opposées deux à deux; leur nombre est $2\frac{n}{6}$ ou $\frac{n}{3}$, et les extrémités des axes de rotation forment $\frac{n}{3}$ pôles équivalents;

4° Les rotations d'amplitudes $\frac{2\pi}{q}, \frac{4\pi}{q}, \ldots, \frac{2(q-1)\pi}{q}$ autour des diagonales du polyèdre; leur nombre est

$$(q-1)\frac{n}{2q} = \frac{5n-12}{12},$$

et les extrémités des axes de rotation forment $\frac{n}{q}$ pôles équivalents.

Le groupe ne contient pas d'autres rotations, car la somme des nombres des rotations 1°, 2°, 3°, 4° est précisément égale à n.

Ainsi, il y a trois et seulement trois systèmes de pôles équivalents ($r = 3$), et l'on a

$$\frac{n}{\nu_1} = \frac{n}{2}, \qquad \frac{n}{\nu_2} = \frac{n}{3}, \qquad \frac{n}{\nu_3} = \frac{n}{q};$$

d'où il suit que

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 3, \qquad \nu_3 = q = 3,\ 4,\ 5$$

[*cf.* Tableau (3), III, IV, V].

Si nous voulons pénétrer un peu plus profondément dans la nature des groupes de rotations trouvés, nous pouvons nous demander s'ils sont simples ou composés.

Un groupe cyclique est simple si son ordre est un nombre premier et alors seulement.

Un groupe du dièdre dont l'ordre est $n = 2m$ contient un groupe cyclique comme sous-groupe invariant, à savoir le groupe des rotations autour du diamètre perpendiculaire au plan du polygone.

Le groupe tétraédrique contient, comme sous-groupe invariant, le *Vierergruppe* constitué par la rotation nulle et les trois rotations 2°.

Le groupe octaédrique contient, comme sous-groupe invariant, le groupe tétraédrique qui superpose à lui-même le tétraèdre formé par les centres de quatre faces non contiguës de l'octaèdre.

Le groupe icosaédrique est, au contraire, simple.

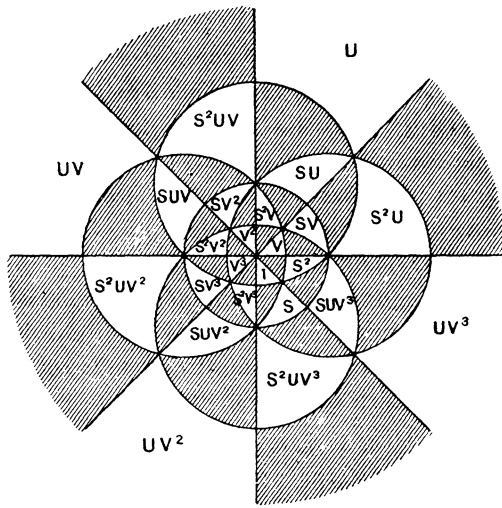
On peut, toutefois, mentionner ici des sous-groupes, bien entendu non distingués, du groupe icosaédrique. Les 15 médianes de l'icosaèdre forment 5 trièdres orthogonaux, qui se superposent l'un à l'autre par rotations autour de diagonales; parmi les 60 rotations icosaédriques, il y en a 12 qui superposent à lui-même un trièdre orthogonal déterminé de médianes; ces rotations forment un groupe tétraédrique. On obtient ainsi 5 sous-groupes tétraédriques *équivalents* qui sont transformés l'un dans l'autre par des rotations autour de diagonales.

5. *Représentation plane des groupes finis de rotations.* — Tout en présentant une égale facilité, l'étude des groupes de rotations que nous venons de trouver est pourtant plus avantageuse à faire avec des figures planes qu'avec des figures sphériques. Pour ce passage, il nous suffira de projeter stéréographiquement les figures sphériques sur le plan.

La remarque suivante peut faciliter la projection

pour les trois polyèdres considérés (tétraèdre, octaèdre, icosaèdre) : les arêtes et les médianes relatives à un même polyèdre sphérique forment par leur réunion des grands cercles complets, au nombre de 6, 9 et 15 respectivement pour les trois cas.

Comme par projection les cercles se changent en cercles ou droites, la figure plane sera constituée dans les trois cas par 6, 9 ou 15 cercles ou droites. Nous



donnons ici comme exemple l'image de l'octaèdre (¹). Les triangles du réseau obtenu sont alternativement hachurés et non hachurés, de telle sorte que les triangles hachurés sont égaux entrè eux et symétriques des triangles blancs, en convenant de qualifier d'*égales* ou de *symétriques* les images planes de triangles sphériques égaux ou symétriques. Le réseau entier est ainsi engendrable par reproduction directe et par reproduc-

(¹) Les symboles marqués sur la figure seront expliqués plus loin.

tion symétrique d'un seul de ses triangles. Les réseaux obtenus sont *réguliers*, c'est-à-dire qu'en chaque nœud il n'y a que des angles égaux. A chaque rotation de la sphère sur elle-même appartenant au groupe considéré, correspond une transformation du plan en lui-même qui permute entre eux les triangles laissés blancs; l'ensemble des transformations ainsi obtenues fait passer d'un triangle blanc déterminé à tous les autres triangles blancs.

6. *Représentation analytique des groupes finis de rotations et de substitutions linéaires.* — La correspondance établie entre les groupes de rotations et les groupes de substitutions linéaires permet de passer aisément des premiers aux seconds. Prenons en effet pour centre de la sphère l'origine du plan de la variable z, pour plan équatorial ce même plan, pour origine des longitudes le plan méridien passant par l'axe des z réels; désignons par μ la longitude, par λ la latitude d'un pôle, par 2ψ l'amplitude de la rotation; la substitution linéaire correspondant à cette rotation est

$$\begin{pmatrix} d+ic, & -(b-ia) \\ b+ia, & d-ic \end{pmatrix},$$

où

$$a = -\cos\lambda \sin\psi \cos\mu, \qquad b = -\cos\lambda \sin\psi \sin\mu,$$
$$c = \sin\lambda \sin\psi, \qquad d = \cos\psi.$$

Au moyen de ces formules, on obtient sans peine nos groupes de substitutions. Nous donnerons, à titre d'exemple, les substitutions de l'octaèdre :

$$z' = i^h z, \qquad z' = \frac{i^k}{z}, \qquad z' = i^h \frac{z - i^h}{z + i^h},$$

h et k prenant, indépendamment l'un de l'autre, les valeurs 0, 1, 2, 3.

Une étude plus approfondie de la constitution de nos groupes conduit à observer que l'ensemble des substitutions d'un groupe polyédrique est représentable à l'aide de trois d'entre elles seulement. La forme générale des substitutions est en effet :

1° Pour le tétraèdre,

$$S^\alpha T^\beta U^\gamma,$$

où

$$\alpha = 0, 1, 2; \qquad \beta = 0, 1; \qquad \gamma = 0, 1;$$

$$S = \begin{pmatrix} 1, & i \\ 1, & -i \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix};$$

2° Pour l'octaèdre,

$$S^\alpha U^\beta V^\gamma,$$

où

$$\alpha = 0, 1, 2; \qquad \beta = 0, 1; \qquad \gamma = 0, 1, 2, 3;$$

$$S = \begin{pmatrix} 1, & i \\ 1, & -i \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} i, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix};$$

3° Pour l'icosaèdre

$$S^\alpha U^\beta \quad \text{et} \quad S^\alpha T S^\gamma U^\beta,$$

où

$$\alpha, \gamma = 0, 1, 2, 3, 4, \qquad \beta = 0, 1;$$

$$S = \begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i}{5}}, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1, & 2 \\ 2, & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Reprenons la figure du paragraphe précédent; elle nous fournit une représentation claire du groupe de substitutions correspondant. Considérons, en effet, un triangle blanc arbitraire comme triangle initial, et désignons-le par 1; à chaque triangle blanc nous attribuerons le symbole de la substitution qui correspond à la rotation transformant le triangle initial en le triangle considéré.

Le triangle blanc désigné par 1 sur la figure et le triangle hachuré contigu à celui-là, le long d'un côté de l'angle droit, forment, par leur réunion, un *domaine fondamental,* c'est-à-dire un domaine contenant un et un seul point homologue de chaque point du plan (en supposant, il est vrai, que la moitié du périmètre du domaine soit regardée comme appartenant au domaine); on entend là par *points homologues* les points qui se transforment l'un en l'autre par les substitutions du groupe. Chaque point du plan appartient à un système de n points homologues; exception est faite seulement pour les nœuds du réseau de triangles qui se répartissent en trois systèmes de $\frac{n}{\nu_1}$, $\frac{n}{\nu_2}$ et $\frac{n}{\nu_3}$ points homologues.

7. *Groupes linéaires et formes invariantes.* — Il convient maintenant, pour la commodité, d'introduire des variables homogènes. Si l'on pose

$$z = \frac{z_1}{z_2}, \qquad z' = \frac{z'_1}{z'_2},$$

la substitution linéaire fractionnaire à une variable (1) se change en une substitution linéaire entière à deux variables :

$$(5) \qquad z'_1 = \alpha z_1 + \beta z_2, \qquad z'_2 = \gamma z_1 + \delta z_2.$$

Mais il est à observer qu'à une même substitution (1) correspondent une infinité de substitutions (5), à savoir toutes les substitutions de la forme

$$z'_1 = k(\alpha z_1 + \beta z_2), \qquad z'_2 = k(\gamma z_1 + \delta z_2),$$

où k est arbitraire; si l'on s'impose maintenant que le déterminant de la substitution soit égal à l'unité, à

toute substitution (1), où il est loisible de supposer

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

correspondent seulement deux substitutions (1), soit

$$z'_1 = \pm(\alpha z_1 + \beta z_2), \qquad z'_2 = \pm(\gamma z_1 + \delta z_2).$$

D'après cela, à un groupe de substitutions non homogènes d'ordre n correspond un groupe de substitutions homogènes d'ordre $2n$.

Soit maintenant une forme, c'est-à-dire une fonction entière homogène des deux variables z_1, z_2, qui s'annule en n points homologues. Si on la soumet à une substitution quelconque du groupe considéré, ses zéros sont simplement permutés entre eux; par suite la forme se reproduit à un facteur constant près. Une telle forme s'appelle une *forme fondamentale invariante;* toute *forme invariante,* c'est-à-dire toute forme qui se reproduit par toutes les substitutions du groupe, est exprimable par un produit de formes fondamentales invariantes. Des considérations particulières font connaître les formes fondamentales Φ_1, Φ_2, Φ_3 qui ont pour zéros respectifs les trois systèmes de nœuds homologues. Comme ces points équivalent à des zéros ν_1^{uples}, ν_2^{uples}, ν_3^{uples}, Φ_i est la puissance $\nu_i^{\text{ième}}$ d'une forme F_i d'ordre $\frac{n}{\nu_i}$. Entre les trois formes $F_i^{\nu_i}$ il existe dans chaque cas une relation linéaire homogène

$$(6) \qquad \mu_1 F_1^{\nu_1} + \mu_2 F_2^{\nu_2} + \mu_3 F_3^{\nu_3} = 0;$$

et toute forme fondamentale est exprimable par une fonction linéaire homogène de ces trois formes.

On va donner, pour chacun des trois groupes polyédriques, les formes F_i ainsi que l'identité (6) qui les lie; dans ce Tableau, les formes F_1 s'annulent aux

milieux des arêtes, les formes F_2 aux centres des faces et les formes F_3 aux sommets du polyèdre correspondant.

Groupe tétraédrique :

$$F_1 = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) \qquad = t,$$
$$F_2 = z_1^4 + 2i\sqrt{3} z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \Phi,$$
$$F_3 = z_1^4 - 2i\sqrt{3} z_1^2 z_2^2 + z_2^4 = \Psi,$$
$$12 i\sqrt{3} t^2 - \Phi^3 + \Psi^3 = 0.$$

Groupe octaédrique :

$$F_1 = z_1^{12} - 33 z_1^8 z_1^4 - 33 z_1^4 z_2^8 + z_2^{12} = \chi,$$
$$F_2 = z_1^8 + 14 z_1^4 z_2^4 + z_2^8 = \Phi\Psi = W,$$
$$F_3 = z_1 z_2 (z_1^4 - z_2^4) = t,$$
$$\chi^2 - W^3 + 108 t^4 = 0.$$

Groupe icosaédrique :

$$F_1 = z_1^{30} + 522 z_1^{25} z_2^5 - 10005 z_1^{20} z_2^{10} - 10005 z_1^{10} z_2^{20} - 522 z_1^5 z_2^{25} + z_2^{30} = T,$$
$$F_2 = - z_1^{20} + 228 z_1^{15} z_2^5 - 494 z_1^{10} z_2^{10} - 228 z_1^5 z_2^{15} - z_2^{20} = H,$$
$$F_3 = z_1 z_2 (z_1^{10} + 11 z_1^5 z_2^5 - z_2^{10}) = f,$$
$$T^2 + H^3 - 1728 f^5 = 0.$$

Si l'on pose

$$(7) \qquad Z = - \frac{\mu_2 F_2^{\nu_2}}{\mu_3 F_3^{\nu_3}},$$

on a, en vertu de (6),

$$Z - 1 = \frac{\mu_1 F_1^{\nu_1}}{\mu_3 F_3^{\nu_3}},$$

ce qui peut s'écrire :

$$\frac{Z - 1}{\mu_1 F_1^{\nu_1}} = \frac{Z}{- \mu_2 F_2^{\nu_2}} = \frac{1}{\mu_3 F_3^{\nu_3}};$$

Z est une fonction de z qui a la même valeur aux points

homologues et en eux seulement; elle prend au milieu des arêtes, aux centres des faces et aux sommets respectivement les valeurs 1, 0, ∞. De plus, toute fonction rationnelle de z qui a toujours la même valeur en des points homologues est une fonction rationnelle de Z.

L'équation (7) sera dans les trois cas :

$$Z = \frac{\Phi^3}{\Psi^3}, \qquad Z = \frac{W^3}{108\,t^4}, \qquad Z = \frac{H^3}{1728\,f^2}.$$

8. *Groupe d'une équation algébrique. Résolvantes.* — Il nous faut intercaler ici quelques considérations algébriques.

Soit une équation algébrique du $m^{\text{ième}}$ degré

$$f(x) = 0, \tag{8}$$

dont nous désignerons les racines par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Les coefficients de l'équation sont des fonctions symétriques connues des racines, et toute fonction rationnelle symétrique des racines est une fonction rationnelle des coefficients, ou, comme on dit, est *rationnellement connue*. Mais il peut arriver dans des cas particuliers que d'autres fonctions rationnelles non symétriques des racines soient aussi rationnellement connues, ou que nous voulions regarder de telles fonctions comme rationnellement connues. L'ensemble des permutations des racines qui laissent ces fonctions invariantes forme évidemment un groupe G, qu'on nomme le *groupe de l'équation* (8). Comme G est un sous-groupe du groupe formé par la totalité des permutations possibles des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, dont l'ordre est $m!$, l'ordre n de G est un diviseur de $m!$

Considérons maintenant une fonction non ration-

nellement connue des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$:

$$y = \psi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m),$$

et désignons par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$ les diverses valeurs qu'elle prend quand on soumet $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ à toutes les permutations du groupe G. Soit

$$\varphi(y) = 0 \tag{9}$$

l'équation dont les racines sont $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\nu$; les coefficients de $\varphi(y)$ sont rationnellement connus, et par suite la formation de l'équation (9) peut être effectuée par des opérations purement rationnelles. D'autre part, la résolution de (9) nous ferait faire un pas en avant dans le problème de la résolution de (8), en ce sens qu'il nous serait permis de regarder comme connue une fonction des racines de (8) qui, auparavant, n'était pas rationnellement connue, et de prendre pour groupe de l'équation non plus G, mais le sous-groupe G′ de G qui laisse invariante la fonction y. Pour cette raison, l'équation (9) est dite une *résolvante* de (8). Le groupe H de (9) est isomorphe au groupe G, et l'ordre de G′ est le quotient des ordres de G et de H. Si l'isomorphisme est holoédrique, G′ se réduit à l'identité, et nous pouvons, si (9) est regardée comme résolue, considérer comme rationnellement connue toute fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ qui n'admet aucune permutation, l'identité exceptée, et en particulier les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ elles-mêmes. La résolution de (8) et celle de (9) sont alors des problèmes équivalents : (9) sera dite une *résolvante équivalente* de (8), et (8) peut aussi inversement être regardée comme une résolvante de (9). Si, au contraire, l'isomorphisme est mériédrique, la résolution de (9) n'est qu'une première étape pour la résolution de (8). Mais ce second cas ne peut

se présenter (*voir* n° 1) que si le groupe G est composé; si G est simple, on ne saurait espérer obtenir une résolvante non équivalente de l'équation donnée.

Un intérêt particulier s'attache à la *résolvante de Galois*, c'est-à-dire à la résolvante équivalente qui a pour racine une fonction linéaire des α_i à coefficients absolument distincts :

$$y = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ldots + c_m\alpha_m.$$

Si l'on effectue sur les racines α_i toutes les permutations du groupe G, les fonctions symétriques des valeurs obtenues pour y sont évidemment rationnellement connues; par suite l'ordre de la résolvante de Galois est n. La résolvante de Galois est irréductible, c'est-à-dire qu'elle ne saurait aucunement se décomposer en facteurs à coefficients rationnellement connus. Ses racines sont des fonctions rationnelles de l'une d'elles; en d'autres termes l'équation se transforme en elle-même par n substitutions :

$$y' = y, \quad y' = \theta_1(y), \quad y' = \theta_2(y), \quad \ldots, \quad y' = \theta_{n-1}(y),$$

$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ désignant des fonctions rationnelles de y. Ces substitutions forment un groupe qui est holoédriquement isomorphe au groupe de la résolvante, et qui peut donc être considéré tout aussi bien comme son groupe.

Réciproquement, si une équation irréductible de degré n se transforme en elle-même par n substitutions rationnelles, elle est sa propre résolvante et le groupe formé par ces substitutions ne peut être pris comme groupe de l'équation.

9. *Application aux équations polyédriques. Résolvante équivalente de l'équation icosaédrique.* — Après

cette digression, revenons à notre question principale. Écrivons l'équation (7) ainsi

$$F(z) = Z. \tag{10}$$

Si l'on soumet z à une substitution quelconque du groupe correspondant

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

on obtient à nouveau, z et z' étant homologues l'un de l'autre :

$$F(z') = F\left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right) = Z.$$

Ainsi, les racines de l'équation (10) sont des fonctions rationnelles, voire linéaires, de l'une d'elles, et l'équation se transforme en elle-même par n substitutions linéaires. Il suit de là que l'équation (10) peut être considérée comme sa propre résolvante de Galois, et que le groupe de substitutions correspondant peut être pris comme groupe de l'équation.

Comme les groupes tétraédrique et octaédrique sont composés, le problème de la résolution des équations correspondantes se simplifie par la formation des résolvantes. Mais il n'en va plus de même pour l'équation icosaédrique, parce que le groupe associé est simple. Néanmoins la recherche des résolvantes, nécessairement équivalentes, de l'équation icosaédrique est du plus haut intérêt. Une importance particulière s'attache à une résolvante du cinquième ordre qui provient de la considération des cinq sous-groupes tétraédriques équivalents, déjà signalés, du groupe icosaédrique. Si l'on forme, en effet, une fonction Y de z qui admette toutes les substitutions d'un de ces sous-groupes, cette fonction ne prendra, par les soixante substitutions du groupe

icosaédrique, que cinq valeurs distinctes; les fonctions symétriques de ces valeurs sont des fonctions rationnelles de Z, et par suite Y est racine d'une équation du cinquième degré dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de Z. Le trièdre orthogonal de médianes qui est transformé en lui-même par les substitutions du sous-groupe considéré peut être regardé comme le système des diagonales d'un octaèdre; désignons par t et W, suivant les notations précédemment employées, les formes relatives à cet octaèdre, par m et n deux constantes arbitraires; posons

$$u = \frac{12 f^2 t}{\mathrm{T}}, \qquad v = \frac{12 f \mathrm{W}}{\mathrm{H}},$$

en sorte que u et v sont des fonctions homogènes de degré zéro de z_1 et z_2, soit des fonctions de z; la fonction

$$\mathrm{Y} = mv + nuv$$

satisfait à l'équation du cinquième ordre

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{Y}^5 + \frac{5}{\mathrm{Z}}\left(8m^3 + 12m^2 n + \frac{6}{1-\mathrm{Z}}mn^2 - \frac{1}{1-\mathrm{Z}}n^3\right)\mathrm{Y}^2 \\ &+ \frac{15}{\mathrm{Z}}\left(-4m^4 + \frac{6}{1-\mathrm{Z}}m^2n^2 + \frac{4}{1-\mathrm{Z}}mn^3 + \frac{3}{4(1-\mathrm{Z})^2}n^4\right)\mathrm{Y} \\ &+ \frac{3}{\mathrm{Z}}\left(48m^5 - \frac{40}{1-\mathrm{Z}}m^3n^2 + \frac{15}{(1-\mathrm{Z})^2}mn^4 + \frac{4}{(1-\mathrm{Z})^2}n^5\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

où il faut remarquer l'absence des termes en Y^4 et en Y^3. C'est une *équation principale,* qui est dite la *résolvante principale* de l'équation icosaédrique. La racine carrée du discriminant de (11) s'exprime rationnellement au moyen de m, n, Z.

10. *Propriété des équations principales du cinquième degré.* — Comme l'équation (11) est une résol-

vante équivalente de l'équation icosaédrique, on peut aussi inversement regarder l'équation icosaédrique comme une résolvante de (11). Ce fait peut recevoir une forme géométrique élégante.

Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées homogènes d'un point de l'espace; si l'on pose

$$x_5 = -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4),$$

x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 s'appellent les *coordonnées pentaédriques* du point considéré. Entre les coordonnées pentaédriques d'un point quelconque, on a l'identité

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 0.$$

Soit maintenant

$$x^5 + 5\alpha x^2 + 5\beta x + \gamma = 0 \tag{12}$$

une équation principale du cinquième ordre, et désignons par ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, ξ_5 ses racines; à cause de l'absence des termes en x^4 et en x^3, on a

$$\sum_{i=1}^{5} \xi_i = 0, \qquad \sum_{i=1}^{5} \xi_i^2 = 0.$$

Il suit de là d'abord que les cinq racines de (12) prises dans un ordre quelconque peuvent être regardées comme les coordonnées pentasphériques d'un point; ensuite que les 120 points

$$x_1 = \xi_{h_1}, \quad x_2 = \xi_{h_2}, \quad x_3 = \xi_{h_3}, \quad x_4 = \xi_{h_4}, \quad x_5 = \xi_{h_5}, \tag{13}$$

où $h_1 h_2 h_3 h_4 h_5$ désigne une permutation quelconque des nombres 1, 2, 3, 4, 5, sont situés sur la surface du second ordre

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 0. \tag{14}$$

Chacune des 120 transformations linéaires de l'espace en lui-même (*collinéations*)

$$(15)\qquad \begin{cases} x_1 = x'_{h_1}, & x_2 = x'_{h_2}, & x_3 = x'_{h_3}, \\ & x_4 = x'_{h_4}, & x_5 = x'_{h_5} \end{cases}$$

permute les uns dans les autres ces 120 points, et transforme la surface (14) en elle-même; et il arrive qu'une collinéation (15) laisse invariants les deux systèmes de génératrices rectilignes de la surface (14) ou permute l'un dans l'autre ces deux systèmes selon que la permutation correspondante $h_1 h_2 h_3 h_4 h_5$ est paire ou impaire.

Désignons par λ le paramètre de la génératrice rectiligne d'un système passant par le point $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ de la quadrique (14); λ est une fonction linéaire fractionnaire des coordonnées x_i. Aux 60 collinéations qui transforment en lui-même chaque système de génératrices correspondent 60 substitutions linéaires fractionnaires; ces substitutions font passer de λ aux paramètres des génératrices du même système qui passent par 60 des 120 points (13), le point initial compris; et l'on peut, par le choix convenable du paramètre λ, faire en sorte que ces 60 substitutions linéaires forment un groupe icosaédrique; d'où il suit que l'équation dont les racines sont les 60 valeurs de λ est une équation icosaédrique.

11. *Résolution des équations du cinquième degré.* — D'après cela, si une équation principale du cinquième degré (12) est donnée, on est assuré de la possibilité de la regarder comme la résolvante principale d'une équation icosaédrique et par suite de ramener sa résolution à celle de cette dernière. Pour obtenir effec-

tivement l'équation icosaédrique, identifions (12) et (11); nous aurons

$$\frac{1}{Z}\left(8m^3+12m^2n+\frac{6}{1-Z}mn^2+\frac{1}{1-Z}n^3\right) = \alpha,$$

$$\frac{3}{Z}\left(-4m^4+\frac{6}{1-Z}m^2n^2+\frac{4}{1-Z}mn^3+\frac{3}{4(1-Z)^2}n^4\right) = \beta,$$

$$\frac{3}{Z}\left(48m^5-\frac{40}{1-Z}m^3n^2+\frac{15}{(1-Z)^2}mn^4+\frac{1}{(1-Z)^2}n^5\right) = \gamma.$$

Par un traitement approprié de ces équations, on arrive à exprimer m, n et Z par des fonctions rationnelles de α, β, γ, ∇, ∇^2 désignant le discriminant de l'équation (12).

En résumé, pour résoudre l'équation proposée (12), nous procéderons donc de la manière suivante :

1° Nous déterminerons m, n, Z comme fonctions rationnelles de α, β, γ, ∇;

2° Nous résoudrons l'équation icosaédrique

$$(16) \qquad \frac{H^3(z)}{1728 f^5(z)} = Z,$$

où Z représente la valeur que nous venons de trouver;

3° Si enfin z est une racine de l'équation (16), la valeur

$$x = m\,u(z) + n\,u(z)\,v(z),$$

où m et n désignent les valeurs trouvées plus haut, est une racine de (12).

La résolution d'une équation principale du cinquième ordre est dès lors ramenée à une extraction de racine carrée (pour le calcul de ∇) et à la résolution d'une équation icosaédrique.

Mais si l'on a affaire à une équation *générale* du cinquième ordre, il est encore besoin d'une extraction de racine pour ramener cette équation à la forme principale.

D'après cela, la transition des équations de degrés 2, 3 et 4 aux équations de degré 5 est très nettement caractérisée. Tandis que la résolution des premières est réductible à de simples radicaux, c'est-à-dire est réductible à la résolution d'équations binomes, la résolution des dernières est seulement réductible à la résolution d'une équation d'un type spécial, de l'équation icosaédrique.

Maintenant se pose d'elle-même la question de savoir s'il y a aussi des équations de degré plus élevé, dont la résolution est réductible à celle d'équations binomes et icosaédriques.

Nous nous bornerons à la signaler.

12. *Résolution de l'équation icosaédrique au moyen de la fonction hypergéométrique.* — Il nous faut maintenant consacrer quelques mots à la résolution de l'équation icosaédrique, en abandonnant le point de vue algébrique.

Désignons par z une fonction de la variable Z, par z', z'', z''' ses dérivées première, deuxième, troisième; considérons l'expression

$$\frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 = [z]$$

comme fonction de Z; elle conserve sa forme si l'on remplace z par une fonction linéaire fractionnaire de z. Si, en particulier, z est lié à Z par l'équation

polyédrique

$$F(z) = Z,$$

Z conserve sa *valeur* si l'on effectue sur z une substitution linéaire appartenant au groupe correspondant; par suite, la valeur de $[z]$ reste aussi inaltérée par une telle substitution. Si l'on observe en outre qu'entre $[z]$ et Z il existe une relation algébrique, on peut en conclure que $[z]$ est une fonction rationnelle de Z. La forme de cette fonction se détermine par des considérations analytiques; on obtient

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} [z] = {} & \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_1^2}\right)\frac{1}{(Z-1)^2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\nu_2^2}\right)\frac{1}{Z^2} \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\nu_1^2} + \frac{1}{\nu_2^2} - \frac{1}{\nu_3^2} - 1\right)\frac{1}{Z(Z-1)}, \end{aligned}\right.$$

où ν_1, ν_2, ν_3 ont la même signification que plus haut.

Cette équation différentielle du troisième ordre est en relation étroite avec l'équation différentielle linéaire homogène du deuxième ordre :

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} & y'' + \frac{1}{Z}y' + \frac{1}{4Z^2(Z-1)^2} \\ & \quad \times\left[-\frac{1}{\nu_2^2} + \left(\frac{1}{\nu_2^2} + \frac{1}{\nu_3^2} - \frac{1}{\nu_1^2} + 1\right)Z - \frac{1}{\nu_3^2}Z^2\right]y = 0; \end{aligned}\right.$$

une intégrale de (17) est en effet le quotient de deux intégrales indépendantes de (18).

Or l'équation (18) rentre dans le type connu des *équations différentielles de Riemann* dont les intégrales s'expriment au moyen des *séries hypergéométriques*. z est donc exprimable en fonction de Z à l'aide de fonctions hypergéométriques de Z.

13. *Aperçu de la résolution de l'équation icosaédrique au moyen des fonctions elliptiques.* — Pour

développer une seconde méthode de résolution, il nous faut présenter quelques préliminaires. Comme nous l'avons vu, à chaque équation polyédrique correspond un réseau plan régulier, constitué par un nombre fini de triangles formés d'arcs de cercle. Si l'on fait abstraction de la condition que le nombre des triangles soit fini, on peut, de tout tel triangle curviligne à angles sous-multiples de 2π (l'angle nul compris), déduire par reproduction et par symétrie alternées (*voir* n° 5, *in fine*) un certain réseau.

A chaque réseau correspond une équation

$$F(z) = Z$$

(transcendante dans le cas d'un réseau infini) qui associe à toute valeur de Z un système de valeurs de z, qui sont toutes des fonctions linéaires fractionnaires de l'une d'elles; les substitutions linéaires correspondantes forment un groupe qui transforme l'équation en elle-même. Considérons donc deux tels réseaux à angles $\frac{2\pi}{\nu_i}$, $\frac{2\pi}{\nu'_i}$ $(i = 1, 2, 3)$, et soient

$$F(z) = Z,$$
$$G(z') = Z$$

les équations correspondantes; si en outre ν_1 est un multiple de ν'_1, ν_2 de ν'_2, ν_3 de ν'_3, z' est une fonction uniforme de z.

Cela posé, désignons par J l'invariant absolu, par ω le rapport des périodes d'une intégrale elliptique de première espèce; on sait que J est une fonction uniforme de ω :

$$J = J(\omega). \tag{19}$$

L'équation (19) (*équation modulaire*) se transforme en elle-même par toute substitution linéaire à coefficients entiers; ces substitutions forment un groupe dit *groupe modulaire,* et l'on a pour le réseau correspondant

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_2 = 3, \qquad \nu_3 = \infty.$$

Observons d'autre part que pour les équations polyédriques

$$\nu_1 = 2, \qquad \nu_3 = 3, \qquad \nu_3 = 3,\ 4,\ 5,$$

et nous pourrons en conclure que si l'on désigne par $Z = F(z)$ une équation polyédrique, par $Z = J(\omega)$ l'équation modulaire, z sera une fonction uniforme de ω.

Quant à la formation effective de cette fonction uniforme, c'est une question que nous n'aborderons pas ici.