NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PIERRE SICARD

Solution de la question d'analyse du concours d'agrégation de 1905

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 546-557

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__546_1>

SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE DU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1905;

PAR M. PIERRE SICARD,
Lieutenant au 35^e d'Artillerie.

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *étant écrite sous la forme*

$$ux + vy + wz = h$$

et les équations

$$u = \cos\varphi, \qquad v = \sin\varphi, \qquad w = \cot\theta, \qquad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ *et* φ *désignent deux paramètres arbitraires et* $f(\theta, \varphi)$ *une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface* S *en coordonnées tangentielles.*

I. *Démontrer que, si l'on considère sur la surface* S *les deux systèmes de courbes* $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, *la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que* $f(\theta, \varphi)$ *soit de la forme*

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α *étant fonction de* θ *seul et* β *fonction de* φ *seul. Dans toute la suite de l'énoncé on supposera que* $f(\theta, \varphi)$ *est de cette forme.*

II. *Montrer que les courbes* $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$

sont alors les lignes de courbure de la surface S *et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de* θ *et de* φ, *les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface* S.

III. *De ces deux rayons, l'un* R_1 *est fonction de* θ *seulement; l'autre* R_2 *dépend en général à la fois de* θ *et de* φ. *Quelle forme doit avoir* $f(\theta, \varphi)$ *pour que* R_2 *soit aussi indépendant de* φ? *Montrer que, dans ce cas, la surface* S *est de révolution autour d'un axe parallèle à* Oz.

IV. *Établir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction* $f(\theta, \varphi)$ *de manière à avoir*

$$R_1 = l \operatorname{tang} \theta, \qquad R_2 = -\, l \cot \theta,$$

R_1 *et* R_2 *étant, suivant l'usage, affectés d'un signe, et* l *désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.*

V. *Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre* θ *et* φ *qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface* S *et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ces points.*

1. La condition nécessaire et suffisante pour que le système des courbes $\varphi = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ soit conjugué est, comme l'on sait, que les coordonnées tangentielles u, v, w, h satisfassent à une même équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\, d\theta} + A\frac{\partial H}{\partial\varphi} + B\frac{\partial H}{\partial\theta} + CH = 0.$$

Dans le cas actuel, les trois coordonnées u, v, w satisfont visiblement à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\, \partial\theta} = 0;$$

h devant y satisfaire également est nécessairement de la forme $\alpha + \beta$, $h = \alpha + \beta$, α étant fonction de θ seul et β étant fonction de φ seul. C. Q. F. D.

2. Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface (S) sont définies par l'équation

$$\cos\varphi x + \sin\varphi y + \cot\theta z = \alpha + \beta \tag{1}$$

et par les deux équations

$$-\sin\varphi x + \cos\varphi y = \frac{d\beta}{d\varphi}, \tag{2}$$

$$-\frac{z}{\sin^2\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta}, \tag{3}$$

obtenues en dérivant successivement l'équation (1) par rapport aux paramètres φ et θ qui entrent dans les coefficients. Nous lisons immédiatement sur les équations (2) et (3) que les courbes $\varphi = \text{const.}$ et $\theta = \text{const.}$ sont respectivement les premières dans des *plans* parallèles à Oz, les secondes dans des *plans* perpendiculaires à Oz. Ces courbes, *conjuguées* et *orthogonales* à la fois, sont nécessairement des *lignes de courbure* de la surface S. Ce résultat aurait pu aussi être mis en évidence en remarquant que $\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ satisfait également à la même équation réduite que u, v, w, et h à l'équation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial\varphi\,\partial\theta} = 0.$$

3. Les rayons de courbure R_1 et R_2 se calculent très simplement par les formules dites *d'Olinde Rodrigues*. En désignant par (c, c', c'') les cosinus directeurs de la normale à la surface S au point (φ, θ), nous avons

$$\frac{\partial z}{\partial\theta} + R_1 \frac{\partial c''}{\partial\theta} = 0 \tag{4}$$

et

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} + R_2 \frac{\partial c}{\partial \varphi} = 0. \tag{5}$$

Or la direction (c, c', c'') perpendiculaire au plan tangent (1) est telle que

$$\frac{c}{\cos\varphi} = \frac{c'}{\sin\varphi} = \frac{c''}{\cot\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}.$$

J'en déduis, en prenant le signe + devant le radical,

$$c = \cos\varphi \sin\theta, \tag{6}$$

$$c' = \sin\varphi \sin\theta, \tag{7}$$

$$c'' = \cos\theta. \tag{8}$$

Dès lors l'équation (4) peut s'écrire, en remplaçant $\frac{\partial z}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial c''}{\partial \theta}$ par leurs expressions tirées des équations (3) et (8) dérivées,

$$\sin\theta \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + 2\cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + R_1 = 0. \tag{A}$$

L'équation (A) nous montre que R_1 est *fonction de* θ *seul.* Calculons R_2. A cet effet, en résolvant les systèmes des équations (1), (2), (3), je tire

$$x = (\alpha + \beta)\cos\varphi - \frac{d\beta}{d\varphi}\sin\varphi + \cos\varphi\cos\theta\sin\theta\frac{d\alpha}{d\theta}.$$

J'en déduis

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\left(\alpha + \sin\theta\cos\theta\frac{d\alpha}{d\theta} + \beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right).$$

D'autre part, en dérivant par rapport à φ l'équation (6),

$$\frac{\partial c}{\partial \varphi} = -\sin\varphi\sin\theta.$$

En portant dans l'équation (5) ces expressions de $\frac{\partial x}{\partial \varphi}$

et de $\frac{\partial c}{\partial \varphi}$ j'obtiens pour déterminer R_2 l'équation

$$\left(\alpha + \sin\theta \cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + \beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}\right) + R_2 \sin\theta = 0.$$

Pour que R_2 soit *indépendant de* φ, il faut et il suffit visiblement que $\beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2}$ soit une constante c_0 :

$$\beta + \frac{d^2\beta}{d\varphi^2} = c_0$$

ou, en intégrant et en désignant par c_1 et c_2 deux autres constantes,

$$\beta = c_0 + c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi.$$

Dans ces conditions, les équations (1), (2), (3), qui définissent les coordonnées d'un point de la surface S, peuvent s'écrire

$$(1') \qquad (x - c_1)\cos\varphi + (y - c_2)\sin\varphi = \alpha + c_0 - z\cot\theta,$$

$$(2') \qquad -(x - c_1)\sin\varphi + (y - c_2)\cos\varphi = 0,$$

$$(3') \qquad -\frac{z}{\sin^2\theta} = \frac{d\alpha}{d\theta}.$$

J'en déduis immédiatement que

$$\begin{aligned}(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2 &= (\alpha + c_0 - z\cot\theta)^2 \\ &= \left(\alpha + c_0 + \cot\theta \frac{d\alpha}{d\theta}\sin^2\theta\right) = \text{fonction de } \theta,\end{aligned}$$

$$z = -\frac{d\alpha}{d\theta}\sin^2\theta = \text{fonction de } \theta.$$

z et $\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}$ étant fonctions d'une variable θ, leur jacobien est nul, et par conséquent

$$z = F\left[\sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}\right].$$

Relation qui caractérise une surface de révolution autour de l'axe $x = c_1$, $y = c_2$ parallèle à Oz.

C. Q. F. D.

4. Pour que R_1 soit égal à $l \tang\theta$ et R_2 à $-l \cot\theta$, il faut que la fonction α satisfasse à la fois aux deux équations suivantes (A′) et (B′), obtenues en remplaçant, dans les équations (A) et (B), R_1, R_2 et β par leurs expressions :

$$\text{(A}'\text{)} \qquad \sin\theta \frac{d^2\alpha}{d\theta^2} + 2\cos\theta \frac{d\alpha}{d\theta} + l \operatorname{tang}\theta = 0,$$

$$\text{(B}'\text{)} \qquad \frac{d\alpha}{d\theta} \sin\theta \cos\theta + \alpha + c_0 - l\cos\theta = 0.$$

Remarquons tout de suite que ces deux équations ne sont pas incompatibles. Car, si nous dérivons l'équation (B′), nous allons retrouver l'équation (A′). Or l'équation (A′) peut s'écrire

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta \frac{d\alpha}{d\theta}\right) = -\frac{l \sin^2\theta}{\cos\theta}.$$

J'en déduis, en intégrant et en désignant par $-c_3$ la constante d'intégration,

$$\text{(C}'\text{)} \qquad \sin^2\theta \frac{d\alpha}{d\theta} = l\sin\theta - l\int \frac{d\theta}{\cos\theta} - c_3.$$

En éliminant $\frac{d\alpha}{d\theta}$ entre (B′) et (C′) j'ai une équation simple qui fournit l'expression de α en fonction de θ

$$\alpha = \left(c_3 + l\int \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cot\theta - c_0.$$

La fonction h est donc déterminée puisque α et β sont calculés

$$h = c_1 \cos\varphi + c_2 \sin\varphi + \left(c_3 + l\int \frac{d\theta}{\cos\theta}\right)\cot\theta.$$

5. L'équation du plan tangent à la surface particulière S que nous envisageons est dès lors

$$(x - c_1)\cos\varphi + (y - c_2)\sin\varphi + (z - c_3)\cot\theta = l\cot\theta \int \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Nous voyons que nous pouvons faire dans cette équation

$$c_1 = c_2 = c_3 = 0,$$

car cela revient à transporter les axes de coordonnées au point (c_1, c_2, c_3). Soit alors par rapport à la nouvelle origine

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi + z\cot\theta = l\cot\theta \int \frac{d\theta}{\cos\theta}.$$

Les coordonnées x, y, z d'un point de la surface vérifient cette équation et les deux suivantes :

$$-x\sin\varphi + y\cos\varphi = 0,$$

$$-\frac{z}{\sin^2\theta} = -\frac{l}{\sin^2\theta}\int \frac{d\theta}{\cos\theta} + l\frac{\cot\theta}{\cos\theta}.$$

J'en déduis très simplement, en résolvant ce système,

$$\begin{aligned} x &= l\cos\varphi\cos\theta, \\ y &= l\sin\varphi\sin\theta, \\ z &= l\left(\int \frac{d\theta}{\cos\theta} - \sin\theta\right). \end{aligned}$$

J'en déduis

$$(\mathrm{D}) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= l(-\sin\varphi\cos\theta\, d\varphi - \cos\varphi\sin\theta\, d\theta), \\ dy &= l(\cos\varphi\cos\theta\, d\varphi - \sin\varphi\sin\theta\, d\theta), \\ dz &= l\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right) d\theta = l\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\, d\theta. \end{aligned} \right.$$

En sorte que l'élément linéaire est donné par la formule

$$ds^2 = l^2(\cos^2\theta\, d\varphi^2 + \tang^2\theta\, d\theta^2).$$

Formule qui peut également s'écrire

$$ds^2 = l^2 \cos^2\theta \left(\frac{\dfrac{d\theta^2}{\cos^2\theta}}{\tan^2\theta} + d\varphi^2 \right).$$

Sous cette forme nous voyons que l'élément considéré est de la forme de l'élément dit *de Liouville*. L'élément de Liouville est, lorsque les paramètres sont u et v, donné par l'équation

$$ds^2 = (\mathrm{U} - \mathrm{V}) \left(\frac{du^2}{\mathrm{U}_1} - \frac{dv^2}{\mathrm{V}_1} \right),$$

où U et U_1 sont fonctions de u seul et V et V_1 fonctions de v seul. Toutes les fois que l'élément se présente sous cette forme, la recherche des géodésiques est simple. La relation entre u et v qui définit une géodésique est (Darboux, *Géométrie supérieure, Cours de la Faculté*, 1904-1905), en désignant par a et b deux constantes :

$$b = \int \frac{du}{\sqrt{\mathrm{U}_1(\mathrm{U} - a)}} \pm \int \frac{dv}{\sqrt{\mathrm{V}_1(\mathrm{V} - a)}}.$$

Dans le cas actuel, cette relation est

$$b = \int \frac{\sin\theta \, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}} \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{a}}.$$

La quadrature $\displaystyle\int \frac{\sin\theta \, d\theta}{\cos^2\theta \sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}}$ se fait très simplement en posant $\cos\theta = t$. Elle est egale à $-\dfrac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{a\cos\theta}$.
La relation demandée est donc

$$\text{(R)} \qquad b + \frac{\sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}}{a \cos\theta} = \pm \frac{\varphi}{\sqrt{a}}.$$

Telle est la relation qui définit une géodésique quelconque. Remarquons d'ailleurs que les *méridiens* de la surface (S) sont aussi des *géodésiques planes*. Leur rayon de courbure, et par conséquent leur courbure, ont été *calculés*.

Calculons la *courbure* et la *torsion* d'une géodésique quelconque et, pour fixer les idées, de la géodésique qui correspond à la relation (R), obtenue en prenant le signe — dans le second membre de la relation (R), en sorte que

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = + \frac{\sqrt{a}\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}.$$

Le calcul est identique avec le signe $+$.

Adressons-nous aux formules connues en Analyse sous le nom de *formules de Frenet-Serret;* α, β et γ désignant les cosinus des angles que font respectivement avec Ox la tangente, la normale principale et la binormale en un point d'une courbe gauche, et ρ et τ le rayon de courbure et la torsion, nous avons les relations

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{\beta}{\rho}, \qquad \frac{d\gamma}{ds} = \frac{\beta}{\tau}.$$

Dans le cas actuel, la courbe en question étant une géodésique, son plan osculateur en un point passe par la normale en ce point à la surface S. En sorte que $\beta = c = \cos\varphi\sin\theta$ [équation (6)]. D'autre part

$$\alpha = \frac{dx}{ds}.$$

De sorte que la première des formules de Frenet peut s'écrire

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\beta}\frac{d^2x}{ds^2}.$$

Or dx est donné par la première des équations (D). D'autre part, en remplaçant dans l'expression de l'élément ds, $\frac{d\varphi}{d\theta}$ en fonction de θ, nous trouvons

$$ds = \frac{l^2 \sin\theta \, d\theta}{\sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\alpha = \frac{dx}{ds} &= \frac{-\sqrt{l^2 \cos^2\theta - a}}{l \sin\theta}\left(\sin\varphi \cos\theta \frac{d\varphi}{d\theta} + \cos\varphi \sin\theta\right) \\ &= -\frac{1}{l}\left(\cos\varphi \sqrt{l^2\cos^2\theta - a} + \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\sin\varphi\right).\end{aligned}$$

J'en déduis

$$\frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{l}\left(\begin{aligned} &-\sin\varphi \frac{d\varphi}{ds}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} - \cos\varphi \frac{l^2 \sin\theta \cos\theta}{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}} \frac{d\theta}{ds} \\ &+ \frac{\sqrt{a}}{\cos\theta}\cos\varphi \frac{d\varphi}{ds} + \frac{\sqrt{a}}{\cos^2\theta}\sin\theta \sin\varphi \frac{d\theta}{ds}\end{aligned}\right),$$

et, en remplaçant $\frac{d\theta}{ds}$ par son expression trouvée ci-dessus et $\frac{d\varphi}{ds}$ par son expression $\frac{\sqrt{a}}{l^2\cos^2\theta}$, j'obtiens après réductions

$$\frac{d^2x}{ds^2} = +\frac{\cos\varphi}{l^3\cos^3\theta}(l^2\cos^4\theta - a).$$

La courbure cherchée $C = \frac{1}{\rho}$ est donc égale à $\frac{1}{\beta}\frac{d^2x}{ds^2}$:

$$\boxed{C = \left|\frac{l^2\cos^4\theta - a}{l^3\cos^3\sin\theta}\right|}. \tag{9}$$

Le calcul de la torsion n'est pas plus compliqué. La binormale étant normale à la fois à la tangente et à la normale principale, droites elles-mêmes orthogonales,

$$\gamma = \frac{c'\,dz - c''\,dy}{ds}.$$

En remplaçant c' et c'' par leurs expressions tirées des équations (6) et (7) (nº 3), et dy et dz par leurs expressions tirées de D, nous obtenons

$$\gamma = \frac{\sin\varphi \sin\theta \dfrac{l \sin^2\theta}{\cos\theta} d\theta - l\cos\theta(\cos\varphi\cos\theta\, d\varphi - \sin\varphi \sin\theta\, d\theta)}{ds}$$

ou, après réductions,

$$\gamma = l\left(\sin\varphi \operatorname{tang}\theta \frac{d\theta}{ds} - \cos\varphi \cos^2\theta \frac{d\varphi}{ds}\right)$$

ou encore, après avoir remplacé $\dfrac{d\theta}{ds}$ et $\dfrac{d\varphi}{ds}$ par leurs expressions,

$$\gamma = \frac{1}{l}\left(\frac{\sin\varphi}{\cos\theta}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a} - \sqrt{a}\cos\varphi\right).$$

J'en déduis

$$\frac{d\gamma}{ds} = \frac{1}{l}\left(\begin{array}{c} \cos\varphi \dfrac{d\varphi}{ds} \dfrac{\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{\cos\theta} \\ + \sin\varphi \dfrac{-l^2\sin\theta\cos\theta\cos\theta + (l^2\cos^2\theta - a)\sin\theta}{\cos^2\theta\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}\dfrac{d\theta}{ds} + \sqrt{a}\sin\varphi \dfrac{d\varphi}{ds}\end{array}\right)$$

ou, finalement,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \cos\varphi \frac{\sqrt{a}\sqrt{l^2\cos^2\theta - a}}{l^3\cos^3\theta},$$

et la torsion, donnée par la formule de Frenet, est telle que

$$(10) \qquad \boxed{\frac{1}{\tau} = \left|\frac{\sqrt{a(l^2\cos^2\theta - a)}}{l^3\cos^3\theta\sin\theta}\right|}.$$

Comme vérification, la *courbure* et la *torsion*, données par les formules (9) et (10), doivent satisfaire à une troisième formule de Serret

$$-\frac{\alpha}{\rho}-\frac{\gamma}{\tau}=\frac{d\beta}{ds}.$$

Cette *vérification* se fait assez simplement.