

MAURICE FRÉCHET

**Sur deux suites remarquables de
polynômes et de courbes**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 538-542

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__538_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[D1b]

**SUR DEUX SUITES REMARQUABLES DE POLYNOMES
ET DE COURBES;**

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Weierstrass a démontré que toute fonction $f(x)$ continue entre 0 et 1 peut être considérée comme la limite uniforme d'une suite infinie de polynomes de degrés croissants :

$$f(x) = \lim_{n=\infty} (a_0^n + \dots + a_n^n x^n).$$

On peut, si l'on veut, s'arranger pour que les coefficients de ces polynomes soient des nombres rationnels. En effet, remplaçons en général a_p^n par $\frac{x_p^n}{n \cdot 2^p}$, a_p^n étant la partie entière du nombre $n \cdot 2^p \cdot a_p^n$. L'erreur commise sur le polynome de rang n sera moindre en

valeur absolue que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \frac{x}{2} + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^p + \dots + \frac{1}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^n \\ & < \frac{1}{n} \left[1 + \frac{x}{2} + \dots + \left(\frac{x}{2}\right)^n + \dots \right] = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1 - \frac{x}{2}} \right). \end{aligned}$$

Et, comme x est compris entre 0 et 1, l'erreur est plus petite que $\frac{2}{n}$. Par suite, cette erreur tend vers zéro quand n croît indéfiniment, et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\alpha_0^n}{n} + \dots + \frac{\alpha_n^n}{n 2^n} x^n \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_0^n + \dots + \beta_n^n x^n}{n 2^n} . \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x), \end{aligned}$$

la convergence étant uniforme.

On voit qu'à *chaque* fonction continue $f(x)$, on peut faire correspondre une certaine suite de polynomes R_1, R_2, \dots . Je dis qu'on peut tirer tous ces polynomes R_n d'une même suite de polynomes S_1, S_2, \dots *indépendante de la fonction* $f(x)$. Cela est évident d'après la théorie des ensembles dénombrables, mais il est bien facile de le démontrer directement. En effet, prenons d'abord tous les polynomes R_n qui correspondent à la même valeur de n . Chacun d'eux est déterminé par les n nombres entiers $\beta_0^n, \dots, \beta_n^n$, et il y en a seulement un nombre fini qui soient tels que la somme

$$s = |\beta_0^n| + \dots + |\beta_n^n|$$

soit inférieure à un nombre donné quelconque. Nous pourrions alors numérotter (dans un ordre quelconque) tous les polynomes R_n tels que l'on ait $s = 1$, puis nu-

méroter à la suite ceux pour lesquels $s = 2, \dots$. On arrivera ainsi à ranger tous les polynomes R_n correspondant à la même valeur de n en une suite :

$$Q_n^1, Q_n^2, \dots, Q_n^p, \dots$$

Mais, maintenant, numérotons avec un seul indice tous les polynomes Q_n^p tels que $n + p$ soit inférieur à 2, 3, \dots . On arrivera finalement à une suite de polynomes à coefficients rationnels

$$S_1(x), S_2(x), \dots, S_q(x), \dots$$

qui comprend tous les polynomes R_n possibles.

Ainsi, *il existe une suite énumérable (Σ) de polynomes S_1, S_2, \dots qui jouit de la propriété suivante :*

Toute fonction $f(x)$ continue entre 0 et 1 est la limite uniforme d'une suite de polynomes convenablement extraite de la suite (Σ).

Autrement dit, on peut écrire :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{q_n}(x),$$

en désignant par $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ une suite [variant avec $f(x)$] de nombres entiers croissants ⁽¹⁾.

On peut énoncer la même proposition sous une autre forme. Posons

$$P_1(x) = S_1(x), \quad P_q(x) = S_q(x) - S_{q-1}(x),$$

et considérons la série

$$(T) \quad P_1(x) + P_2(x) + P_3(x) + \dots$$

(1) On a ainsi une preuve effective de ce fait connu que toute fonction continue peut être définie par une suite infinie de nombres entiers.

Si l'on groupe ainsi

$$(P_1 + \dots + P_{q_1}) + (P_{q_1+1} + \dots + P_{q_2}) + \dots \\ + (P_{q_{n-1}+1} + \dots + P_{q_n}) + \dots$$

les termes de la série T, on obtient précisément une série dont la somme des n premiers termes est S_{q_n} quel que soit n .

Donc, *il existe une série T dont tous les termes sont des polynomes choisis une fois pour toutes et qu'on peut faire converger uniformément vers n'importe quelle fonction continue entre 0 et 1, en groupant à chaque fois de façon convenable les termes de cette série.*

Application aux courbes continues. — Une courbe continue est une courbe C qui peut être représentée par des formules telles que

$$x = f(t), \quad y = g(t), \quad z = h(t),$$

f, g, h étant trois fonctions continues de 0 à 1.

On dit qu'une courbe continue C_n

$$x = f_n(t), \quad y = g_n(t), \quad z = h_n(t)$$

tend vers la courbe C quand n croît indéfiniment si

$$|f - f_n|, \quad |g - g_n|, \quad |h - h_n|$$

tendent uniformément vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Ceci étant, considérons les courbes unicursales $C_{p,q,r}$:

$$x = S_p(t), \quad y = S_q(t), \quad z = S_r(t);$$

les fonctions S_p, S_q, S_r étant trois quelconques des polynomes définis plus haut.

Quelle que soit la courbe C, on peut écrire des égalités de la forme

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{p_n}(t),$$

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{q_n}(t),$$

$$h(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{r_n}(t).$$

Autrement dit, la courbe C est la limite d'une suite infinie de courbes

$$C_{p_1, q_1, r_1}, C_{p_2, q_2, r_2}, \dots, C_{p_n, q_n, r_n}, \dots$$

Mais, en employant la même méthode que pour les polynômes Q_n^p , on peut ranger toutes les courbes $C_{p, q, r}$ en une seule suite

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$$

Donc :

On peut former une suite infinie de courbes unicursales $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_n, \dots$ jouissant de la propriété suivante :

Toute courbe continue est la limite d'une suite infinie de courbes

$$\Gamma_{m_1}, \Gamma_{m_2}, \dots, \Gamma_{m_n}, \dots,$$

convenablement extraite de la suite primitive

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$$
