G. FONTENÉ

Sur les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 529-538

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__529_0>

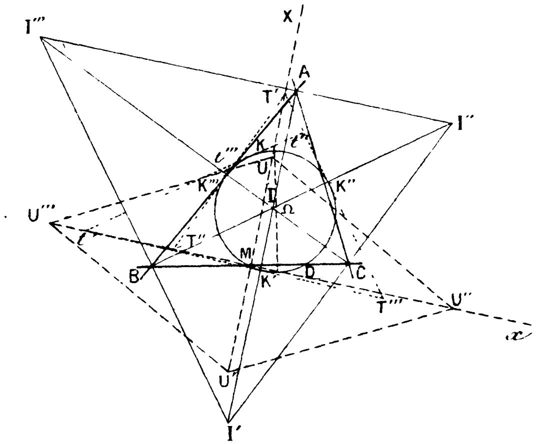
[K2c]

SUR LES POINTS DE CONTACT DU CERCLE DES NEUF POINTS D'UN TRIANGLE AVEC LES CERCLES TANGENTS AUX TROIS CÔTÉS;

Par M. G. FONTENÉ.

1. Considérons (*fig.* 1) un triangle ABC et son

Fig. 1.



cercle des neuf points (centre Ω) passant par les milieux M, N, P des côtés. Soient K, K′, K″, K‴ les points de contact de ce cercle avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle (centres I, I′, I″, I‴). Le point K, par exemple, est le point commun aux cercles des neuf points des triangles IBC, ICA, IAB; ce fait, qui résulte de la démonstration du théorème de Feuerbach donnée à la page 260 de ce Volume, a été signalé d'abord par M. Ch. Michel (*Bulletin des Sciences mathématiques et physiques*, 9e année, p. 208), en partant d'une construction du point K donnée par M. Mannheim. Considérons le point K comme le second point d'intersection du cercle Ω avec le cercle des neuf points du triangle IBC, et cherchons le diamètre MU de ce dernier cercle. La tangente en M est parallèle à la tangente en I du cercle IBC, laquelle fait avec BC un angle ayant pour valeur $\frac{C-B}{2}$, de sorte que le diamètre MU fait avec la hauteur du triangle ABC un angle ayant cette même valeur; ce diamètre est parallèle à I'I et est, par suite, dirigé suivant la bissectrice de l'angle NMP. Il est d'ailleurs égal à la moitié de I'I.

Des faits analogues ayant lieu pour les cercles exinscrits, on a ce théorème :

Si, sur les bissectrices MX *et* Mx *des angles intérieur et extérieur en* M *du triangle* MNP, *on prend*

$$MU = MU' = \frac{II'}{2}, \qquad MU'' = MU''' = \frac{I''I'''}{2},$$

on a les diamètres de quatre circonférences qui rencontrent encore la circonférence Ω *aux points* K, K', K'', K'''.

Le milieu de II' étant sur la perpendiculaire à BC menée en M, *les directions* IU, I'U' *sont perpendiculaires à* BC; le cercle de diamètre MU, par exemple, passe bien au pied de la hauteur issue de I dans le triangle IBC. Une remarque analogue s'applique à I''I'''.

2. On a, en outre, dans le quadrangle orthogonal II'I''I''',

$$\overline{II'}^2 + \overline{I''I'''}^2 = 4R_1^2,$$

R_1 étant le rayon du cercle $I'I''I'''$, par exemple; on a donc, en divisant par 4,

$$\overline{MU}^2 + \overline{MU''}^2 = 4R^2,$$

R étant le rayon du cercle ABC, ou enfin

$$(1) \qquad UU'' = 2R = 2d,$$

d étant le diamètre du cercle Ω.

Or, sur le cercle des neuf points d'un triangle ABC, les points de contact K, K', K'', K''' de ce cercle avec les cercles tangents aux trois côtés ne sont pas quelconques : ils sont liés par une relation, puisque la figure formée par quatre points sur un cercle dépend de sept paramètres qui doivent ici se réduire aux six paramètres du triangle. Comme la figure formée par un losange $UU''U'U'''$ et un cercle Ω de diamètre $\frac{UU''}{2}$, passant au point de rencontre M des diagonales, dépend de six paramètres, on a ce théorème :

Étant donné un losange dont les diagonales UU' *et* $U''U'''$ *se coupent en* M, *on mène par* M *un cercle* Ω *dont le diamètre est égal à la moitié du côté du losange; les cercles décrits sur* MU, MU', ... *comme diamètres rencontrent le premier cercle en des points* K, K', K'', K''' *qui sont les points de contact de ce cercle, considéré comme cercle des neuf points d'un certain triangle* ABC, *avec les cercles tangents aux trois côtés de ce triangle.*

On peut construire le triangle ABC. En premier lieu, les droites MX, Mx qui portent les diagonales du losange sont les bissectrices en M pour le triangle MNP; si donc X_0 et x_0 sont les seconds points où ces droites rencontrent la circonférence Ω, le diamètre X_0x_0 du cercle Ω est perpendiculaire à NP, par suite à BC; on peut alors tracer la droite BC par le point M ; le second point de rencontre de cette droite avec la circonférence Ω est le pied D de la hauteur AD du triangle ABC, et l'on peut tracer par D la droite qui porte cette hauteur : c'est un premier lieu du point A. D'autre part, les côtés de l'angle A du triangle sont perpendiculaires aux côtés du losange, en vertu de la relation

$$\operatorname{tang} \mathrm{MU''U} = \frac{\mathrm{MU}}{\mathrm{MU''}} = \frac{\mathrm{II'}}{\mathrm{I''I'''}} = \operatorname{tang}\frac{\mathrm{A}}{2} = \operatorname{tang} \mathrm{IAB}.$$

Les directions des côtés du triangle ABC étant connues, celle de la médiane MA l'est également, et l'on peut tracer par M la droite qui porte cette médiane : c'est un second lieu du point A. On obtient donc le point A et, par suite, le triangle.

3. Considérons une circonférence Ω, un point M de cette circonférence et une droite Mx passant en M ; prenons sur cette droite les segments égaux MU$''$, MU$'''$, et sur ces segments, comme diamètres, décrivons deux circonférences qui déterminent sur la première les points K$''$ et K$'''$. Si l'on fait varier la longueur MU$''$, il y a involution entre les droites MK$''$, MK$'''$, et les rayons doubles sont la tangente en M au cercle Ω et la perpendiculaire MX à Mx. On a donc ce théorème :

Les points de contact du cercle des neuf points d'un triangle avec les cercles tangents aux trois côtés étant K, K$'$, K$''$, K$'''$, *si* M, N, P *sont les milieux des côtés, la tangente en* M *à ce cercle a pour conjuguée par rapport aux droites* MK$''$, MK$'''$ *la bissectrice* MX *de l'angle* M *du triangle* MNP, *et pour conjuguées par rapport aux droites* MK, MK$'$ *la bissectrice* Mx *de l'angle extérieur en* M *de ce même triangle.*

Si X_0 et x_0 sont les points où les bissectrices en question rencontrent encore le cercle Ω, les points K'' et K''' forment avec les points M et X_0 une division harmonique sur le cercle des neuf points; de même, les points K et K' forment avec les points M et x_0 une division harmonique. Les cordes $K''K'''$ et MX_0 sont donc conjuguées par rapport à ce cercle, ainsi que les cordes KK' et Mx_0. On a ce théorème :

Si T', T'', T''', t', t'', t''' *sont les sommets du quadrilatère complet formé par les tangentes au cercle* Ω, *aux points* K, K', K'', K''', *le point* T', *pôle de la corde* $K''K'''$, *et le point* t', *pôle de la corde* KK', *sont sur les bissectrices* MX *et* Mx *des angles intérieur et extérieur en* M *du triangle* MNP.

On remarquera l'angle droit $T'Mt'$.

4. Soit ABCH un quadrangle orthogonal, c'est-à-dire un quadrangle dans lequel les côtés opposes HA et BC, ... sont rectangulaires. Si D, E, F sont les points d'intersection des côtés opposés, le cercle DEF passe par les milieux des six côtés du quadrangle. Ce cercle Ω est le cercle des neuf points de chacun des quatre triangles ABC, HBC, HCA, HAB; il est donc tangent aux seize cercles qui touchent les trois côtés de l'un ou l'autre de ces triangles.

Le quadrilatère AEHF étant inscriptible, les bissectrices en A pour le triangle ABC, et les bissectrices en H pour le triangle HBC, sont parallèles; si M, N, P, M', N' P' sont les milieux des segments BC, CA, AB, HA, HB, HC, les bissectrices en M sont donc les mêmes pour les deux triangles MNP et $MN'P'$, comme on le verrait d'ailleurs en considérant les seconds points de rencontre X_0 et x_0 de ces bissectrices avec le cercle Ω.

Si donc on désigne par K_1, K'_1, K''_1, K'''_1 les points de contact du centre Ω avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle HBC, les droites MX et Mx, qui contiennent déjà les points T' et t', contiennent également les points analogues T'_1 et t'_1. *Les six points milieux* M, N, P, M', N', P' *donnent lieu à douze bissectrices dont chacune contient deux des vingt-quatre sommets des quatre quadrilatères complets* (T, t), (T_1, t_1), ...

3. Prenons comme axes de coordonnées les droites Mx et MX. Le demi-angle en U'' du losange étant $\frac{A}{2}$ ou α, on a, pour les équations des cercles décrits sur MU et MU' comme diamètres,

$$x^2 + y^2 - 2d \sin\alpha . y = 0,$$
$$x^2 + y^2 + 2d \sin\alpha . y = 0;$$

si l'on désigne par θ l'angle $\frac{C-B}{2}$, le cercle des neuf points a pour équation

$$x^2 + y^2 - d\sin\theta . x - d\cos\theta . y = 0.$$

Les équations des cordes communes MK, MK' sont donc

$$x\sin\theta + y\cos\theta = \quad 2y\sin\alpha,$$
$$x\sin\theta + y\cos\theta = -2y\sin\alpha;$$

les coefficients angulaires de ces droites sont

$$m = \frac{\sin\theta}{2\sin\alpha - \cos\theta}, \qquad m' = \frac{-\sin\theta}{2\sin\alpha + \cos\theta},$$

et l'on a

$$\operatorname{tang}(MK, MK') = \frac{m' - m}{1 + mm'}$$
$$= \frac{-4\sin\alpha\sin\theta}{4\sin^2\alpha - 1} = \frac{2\sin\alpha\sin\theta}{\cos 2\alpha - \frac{1}{2}}.$$

On a un calcul analogue pour K″ et K‴; il faut échanger x et y, remplacer α et θ par leurs compléments, et regarder m et m' comme des coefficients angulaires relatifs au système d'axes Oy, Ox, de sorte que le signe de l'angle (MK″, MK‴) est changé; en prenant ce signe dans le système d'axes Ox, Oy, on a donc

$$\operatorname{tang}(\mathrm{MK}'', \mathrm{MK}''') = \frac{2\cos\alpha\cos\theta}{\cos 2\alpha + \frac{1}{2}}.$$

Ainsi, le plan étant orienté dans le sens ABC, si S est un point quelconque de la circonférence des neuf points, on a

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang} \mathrm{KSK}' = \frac{\sin B - \sin C}{\frac{1}{2} - \cos A}, && \operatorname{tang} \mathrm{K''SK'''} = \frac{\sin B + \sin C}{\frac{1}{2} + \cos A}, \\ &\operatorname{tang} \mathrm{KSK}'' = \frac{\sin C - \sin A}{\frac{1}{2} - \cos B}, && \operatorname{tang} \mathrm{K'''SK'} = \frac{\sin C + \sin A}{\frac{1}{2} + \cos B}, \\ &\operatorname{tang} \mathrm{KSK}''' = \frac{\sin A - \sin B}{\frac{1}{2} - \cos C}, && \operatorname{tang} \mathrm{K'SK''} = \frac{\sin A + \sin B}{\frac{1}{2} + \cos C}, \end{aligned} \right.$$

$$A + B + C = \pi;$$

les six premières relations forment seulement trois relations distinctes.

Si, au lieu de se régler sur le point K, on se règle sur le point K′ en désignant les points K′, K, K‴, K″ par les lettres k, k', k'', k''', et en posant

$$A' = A, \qquad B' = B + \pi, \qquad C' = C + \pi,$$

on a

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang} kSk' = \frac{\sin B' - \sin C'}{\frac{1}{2} - \cos A'}, && \operatorname{tang} k''Sk''' = \frac{\sin B' + \sin C'}{\frac{1}{2} + \cos A'}, \\ &\operatorname{tang} kSk'' = \frac{\sin C' - \sin A'}{\frac{1}{2} - \cos B'}, && \operatorname{tang} k'''Sk' = \frac{\sin C' + \sin A'}{\frac{1}{2} + \cos B'}, \\ &\operatorname{tang} kSk''' = \frac{\sin A' - \sin B'}{\frac{1}{2} - \cos C'}, && \operatorname{tang} k'Sk'' = \frac{\sin A' + \sin B'}{\frac{1}{2} + \cos C'}, \end{aligned} \right.$$

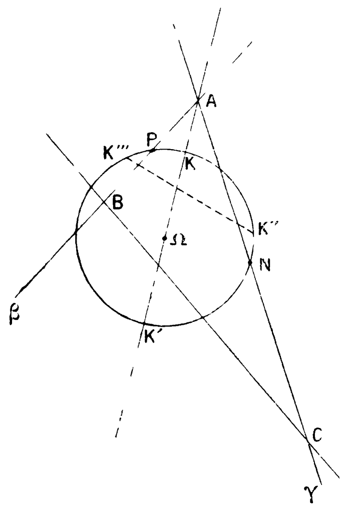
$$A' + B' + C' = 3\pi.$$

Réciproquement, quatre points K, K′, K″, K‴ *situés sur un cercle sont les points de contact de ce cercle, considéré comme cercle des neuf points d'un triangle, avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle, si l'on peut trouver trois angles* A, B, C *vérifiant, par exemple, les trois premières des relations* (1), *où entre le point* K, *et satisfaisant à la condition*

$$A + B + C = (2k + 1)\pi.$$

6. *Soient deux droites infinies* β *et* γ (*fig.* 2) *qui*

Fig. 2.



se coupent en A *sous des angles de* 60° *et de* 120°. *Si une troisième droite détermine avec les deux premières un triangle* ABC, *dont l'angle* A *peut avoir* 60° *ou* 120°, *le cercle des neuf points de ce triangle a son centre* Ω *sur la bissectrice de l'angle de* 60° (*angle intérieur ou angle extérieur*) (¹).

(¹) Si les hauteurs BE, CF se coupent en H, on a aussi en H un angle de 60° dont la bissectrice contient le point Ω.

Les deux cercles tangents aux trois côtés du triangle, qui ont leurs centres sur cette bissectrice, touchent le cercle des neuf points aux extrémités K, K′ ou K″, K‴ du diamètre de ce cercle porté par cette bissectrice, et ce fait est d'accord avec les formules (1) qui donnent alors pour tang KSK′ ou tang K″SK‴ une valeur infinie.

Si l'on se donne le cercle Ω, *avec le diamètre* KK′ (*ou* K″K‴), en prenant un point quelconque A sur la droite qui porte ce diamètre et en menant par ce point deux droites β et γ faisant avec la droite KK′ des angles de 30°, il suffit de prendre sur β et γ deux segments AB et AC qui aient leurs milieux sur le cercle Ω sans être égaux, pour former un triangle ABC admettant le cercle Ω comme cercle des neuf points. Selon que le point A est pris en dehors du segment KK′ ou à l'intérieur de ce segment, l'angle en A qui a pour bissectrice la droite KK′ est l'angle intérieur ou l'angle extérieur en A du triangle ABC. Les points K, K′ (ou K″, K‴) sont les points de contact du cercle des neuf points avec les cercles tangents aux trois côtés du triangle et qui ont leurs centres sur la bissectrice AKK′; restent deux autres points de contact que nous appellerons K″, K‴, même dans le cas où il conviendrait de les nommer K, K′. Si l'on pose

$$\operatorname{tang} KMK'' = x, \qquad \operatorname{tang} KMK''' = y,$$

les formules (1) donnent

$$xy\sqrt{3} - 2(x-y) - \sqrt{3} = 0;$$

si l'on fait $x = y$, on a

$$x = y = \pm 1;$$

on a encore la solution

$$x = -\sqrt{3}, \qquad y = \sqrt{3}.$$

L'enveloppe de la corde $K''K'''$ *est une ellipse doublement tangente au cercle* Ω; *la corde des contacts est le diamètre de ce cercle perpendiculaire à* KK' : *c'est un axe de la conique; l'autre axe est la moitié du premier.*

7. Ce qui précède conduit à chercher l'angle $(AI, A\Omega)$; on trouve

$$\frac{\operatorname{tang}(AI, A\Omega)}{\operatorname{tang}\frac{B-C}{2}} = \operatorname{tang}\frac{A-60}{2}\operatorname{tang}\frac{A+60}{2}.$$