Nouvelles annales de mathématiques

C.-A. Laisant

Sur les sommes des puissances semblables des racines ; formules de Newton

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 512-514

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__512_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[A3b]

SUR LES SOMMES DES PUISSANCES SEMBLABLES DES RACINES; FORMULES DE NEWTON;

Par M. C.-A. LAISANT.

Les formules classiques de Newton, relatives aux sommes des puissances semblables des racines d'une équation algébrique, peuvent être établies par une méthode qui évite, pour ainsi dire, tout calcul, et qui mériterait de passer dans l'enseignement, car elle dispense de tout effort de mémoire. Nous nous proposons de l'indiquer ici.

Si

$$f(x) = A_0 x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} x + A_m = 0$$

est une équation algébrique ayant pour racines a, b, ..., l, nous désignerons, comme d'habitude, par S_1, S_2, ... la somme des racines, la somme de leurs carrés, etc.

Par substitution des racines, et addition, il est évident que l'on a

$$(1) \qquad A_0 S_m + A_1 S_{m-1} + \ldots + A_{m-1} S_1 + m A_m = 0.$$

D'autre part, on a, en vertu des relations entre les racines et les coefficients,

$$A_0 S_1 + A_1 = 0,$$

c'est-à-dire que S_1 ne dépend que de A et A_1. Si l'on veut trouver S_2, en se rappelant que $\frac{A_2}{A_0} = \Sigma ab$, on a

$$S_2 = (a + b + \ldots)^2 - 2\Sigma ab = \frac{A_1^2}{A_0^2} - 2\frac{A_2}{A_0},$$

d'où

$$A_0 S_2 + A_1 S_1 + 2 A_2 = 0,$$

si bien que S_2 ne dépend que de A_0, A_1, A_2.

D'une manière générale, la somme S_p, étant une fonction de degré p, ne pourra jamais dépendre que de A_0, A_1, ..., A_p, et non des coefficients suivants, qui sont des fonctions des racines de degrés supérieurs à p. Par conséquent, toutes les équations qui ont pour coefficients de leurs $p+1$ premiers termes

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_p$$

auront mêmes valeurs pour S_1, S_2, ..., S_p. Parmi toutes ces équations, prenons celle de degré p,

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots + A_{p-1} x + A_p = 0,$$

et appliquons-lui la formule (1) ci-dessus. Nous aurons

$$A_0 S_p + A_1 S_{p-1} + \ldots + A_{p-1} S_1 + p A_p = 0,$$

c'est-à-dire la formule générale de Newton. Naturellement ceci s'applique à toutes les valeurs entières de p, jusqu'à $p = m$.

Pour plus de clarté, l'équation $f(x) = 0$ aura même S_1 que l'équation

$$A_0 x + A_1 = 0,$$

qui a une racine unique.

Elle aura mêmes S_1 et S_2 que

$$A_0 x^2 + A_1 x + A_2 = 0.$$

Elle aura mêmes S_1, S_2 et S_3 que

$$A_0 x^3 + A_1 x^2 + A_2 x + A_3 = 0;$$

et ainsi de suite.

Il nous paraît difficile qu'un élève ayant appris, et compris, cette démonstration si simple, puisse jamais l'oublier.

Remarque. — On reprochera peut-être à cette démonstration un défaut de rigueur, en alléguant que S_p pourrait prendre une forme telle que $\frac{P}{Q}$ par exemple, P et Q étant de certaines fonctions des coefficients A_0, A_1, ... A cette objection il est possible, ce me semble, de répondre que les relations en jeu ne sont pas des égalités arithmétiques, mais bien des identités algébriques; si bien que dans chacune de ces relations il faut supposer que les S et les A sont remplacées par les fonctions des racines que ces lettres représentent. Si donc on avait $S_p = \frac{P}{Q}$, c'est que les deux fonctions P et Q présenteraient un facteur commun; et la fraction $\frac{P}{Q}$, devenue irréductible, devrait prendre simplement la forme d'un polynome homogène de degré p, par rapport aux racines. Les vérifications directes faites sur les cas $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$ sont, d'ailleurs, de nature à faire disparaître toute obscurité.