PAUL LÉVY

Sur les séries semi-convergentes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 506-511

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__506_1>

[D2aβ]

SUR LES SÉRIES SEMI-CONVERGENTES;

PAR M. PAUL LÉVY,
Élève de l'École Polytechnique.

On sait que la somme d'une série semi-convergente à termes imaginaires peut prendre une infinité de valeurs lorsque l'on change l'ordre des termes. Mais la démonstration classique de cette proposition ne renseigne pas sur la question de savoir si elle peut prendre une valeur quelconque. On y distingue les termes à partie réelle positive u_p et les termes à partie réelle négative v_q. Posons

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_p = S_p + i\Sigma_p.$$

En même temps que q termes à partie réelle négative, on en considère p de l'autre série, p étant une certaine fonction de q telle que la partie réelle de la somme ait une limite donnée. Cette condition ne définit pas complètement p; si p_1 et p_2 en sont deux déterminations, on sait seulement que l'on a

$$\lim_{q=\infty} (S_{p_1} - S_{p_2}) = 0.$$

On en déduira souvent, la partie réelle et la partie imaginaire de u_p étant du même ordre de grandeur,

$$\lim(\Sigma_{p_1} - \Sigma_{p_2}) = 0.$$

Dans ce cas, la partie imaginaire de la somme de la série proposée apparaît comme une fonction de sa partie réelle. Mais ce n'est pas le cas général, et d'ailleurs ce résultat tient essentiellement à la condition qu'on s'est imposée de respecter l'ordre des termes dans deux séries partielles. Si, au lieu de deux pareilles séries, on en constitue trois, on aura évidemment une plus grande indétermination sur la somme, et peut-être sera-t-il possible de répondre complètement à la question posée au début.

Considérons d'abord un cas en apparence très particulier, celui où tous les termes de la série sont représentés dans le plan par des vecteurs parallèles à l'une ou l'autre de trois demi-droites Ox, Oy, Oz; de plus, ces trois demi-droites partagent le plan autour du point O en trois angles dont aucun n'atteint deux droits, et enfin chaque série partielle est divergente, son terme général tendant vers zéro. Je dis qu'en respectant l'ordre des termes dans chaque série partielle, on peut donner à la somme de la série étudiée une valeur quelconque. Autrement dit, on peut porter bout à bout les vecteurs représentant ces termes, de manière à atteindre à la limite un point S donné arbitrairement. Par S, menons les demi-droites SX, SY, SZ parallèles à Ox, Oy, Oz, qui partagent le plan en trois régions E_x, E_y, E_z, et imposons-nous la condition de prendre un vecteur parallèle à Ox chaque fois que le dernier sommet de la ligne brisée formée sera dans E_x, et opérons de même pour les deux autres séries partielles (SX pourra être indifféremment regardé comme appartenant à E_y ou E_z). Il résulte d'abord de la divergence de chaque série partielle que le dernier sommet de la ligne brisée sera une infinité de fois dans chacune des trois régions distinguées, et, par suite, que l'on ne négligera, en opérant comme il vient d'être indiqué, aucun terme de la série proposée. A l'instant où l'on considère le sommet S_n, soient a, b, c des limites supérieures des modules des termes restant dans chaque série; portons sur SX, SY, SZ des longueurs $SA = a$, $SB = b$, $SC = c$, puis, par A, B, C, menons des parallèles à SY et SZ, à SZ et SX, à SX et SY. On aura ainsi un hexagone H. Soit maintenant S_{n+p} un sommet tel qu'entre S_n et S_{n+p}, il y ait au moins un sommet dans chacune des régions E_x, E_y, E_z. On vérifie facilement que S_{n+p} et tous les sommets suivants sont intérieurs à l'hexagone H. Or a, b et c tendent vers 0; on en déduit la proposition annoncée.

Considérons maintenant une série

$$(1) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

satisfaisant à la seule condition que u_n tende vers zéro; u_n est représenté par un vecteur OA_n qui coupe en a_n un cercle de centre O et de rayon arbitraire et constant, a_n étant par rapport à O du même côté que A_n; soit sur ce cercle un arc bc. Il peut arriver que les valeurs de n pour lesquelles a_n est intérieur à cet arc soient en nombre infini et que les modules des termes correspondants aient une somme infinie. Si cette double condition n'est pas réalisée, il est évident que le rang de ces termes est sans influence sur la somme de la série. Dans le cas où elle l'est, il existe certainement sur bc un point a tel que tout arc $b'c'$, si petit qu'il soit, qui comprend a à son intérieur, jouit de la même propriété que bc; en particulier, si la série donnée n'est pas absolument convergente, il existe au moins un tel point sur le cercle. Nous dirons que a est un *point d'indétermination* pour la série (1). Si l'on veut distinguer, selon que cette propriété appartient à ac' ou à ab', on dira que a est un point d'indétermination du côté de l'arc ac ou du côté de l'arc ab. Il est encore nécessaire d'établir une autre distinction; décomposons tous les vecteurs OA_n pour lesquels a_n est intérieur à ab' suivant Oa et la direction perpendiculaire Oa_1. Si les composantes suivant Oa_1 ont une somme infinie, quelque petit que soit ab', le point a sera dit de *première espèce* du côté de l'arc ab; sinon il sera dit de *deuxième espèce*. Tous les points d'indétermination pour la série (1) forment sur le cercle un ensemble E; si une infinité de points de cet ensemble ont pour limite un point a et sont d'un même côté de ce point, on voit facilement que, de ce côté, le point a est un point d'indétermination de première espèce; à cette condition près, on peut choisir arbitrairement l'ensemble E et assujettir ses points à être d'un côté ou de l'autre d'une espèce ou de l'autre, il existera toujours une série satisfaisant à ces conditions.

Considérons un arc ab inférieur à un demi-cercle et contenant des points de l'ensemble E, et choisissons deux axes, Ox intérieur à cet angle et tel que, dans chacun des angles aOx et bOx, il y ait des points de l'ensemble E, et Ox' extérieur à cet angle. Décomposons suivant ces deux directions tous les vecteurs correspondant à des points de l'arc ab; les composantes suivant Ox formeront une série divergente à termes tous de même signe; les composantes dirigées suivant Ox' formeront une série semi-convergente, dont on pourra annuler la somme en déterminant convenablement l'ordre des termes. A condition de ne plus changer cet ordre dans la suite des opérations, on pourra négliger ces composantes sans que cela ait d'influence sur la somme de la série (1). Remarquons de plus que, si l'arc ab est égal à un demi-cercle, si les seuls points de l'ensemble E situés sur cet arc sont a et b, et si l'un des deux au moins est de première espèce du côté de l'arc considéré; on peut encore opérer de la même manière en prenant Ox quelconque et Ox' confondu avec ab et le résultat sera le même.

En général, on pourra diviser le cercle en trois arcs et opérer la même réduction, en choisissant les trois directions Ox, Oy, Oz comme il a été dit plus haut. On sera alors ramené au cas particulier déjà étudié. La somme de la série est donc complètement arbitraire. Cette manière d'opérer est en défaut dans les deux cas suivants :

1° Tous les points de l'ensemble E sont intérieurs à un arc ab au plus égal à un demi-cercle et qui peut être nul; s'il est égal à un demi-cercle, les points a et b doivent être de seconde espèce du côté du demi-cercle complémentaire. Dans ce cas, la série (1) est toujours divergente, le point qui représente la somme des termes s'éloignant à l'infini dans une direction arbitraire intérieure à l'angle aOb.

2° L'ensemble E se réduit à deux points a et b diamétralement opposés et tous les deux de seconde espèce. Dans ce cas, les composantes des vecteurs OA_n perpendiculaires à ab ont une somme indépendante de l'ordre des termes, et la somme des composantes parallèles à *ab* peut prendre la valeur que l'on veut. La somme de la série sera alors représentée par un point choisi arbitrairement sur une droite.

Ce résultat peut d'ailleurs se généraliser; au lieu de raisonner dans le plan, raisonnons dans l'espace à n dimensions. Nous appellerons alors *plan* le lieu de points dont les coordonnées satisfont à un certain nombre de relations linéaires, ce nombre pouvant être égal comme valeurs extrêmes à 0, $n - 1$, ou n, auxquels cas le plan se réduit à tout l'espace, une droite ou un point. Soit une suite infinie de vecteurs tels qu'il n'y en ait qu'un nombre fini dont la longueur soit supérieure à un nombre donné, quel que soit ce nombre. En portant ces vecteurs bout à bout, on obtient un point S_n qui tend à la limite vers un certain point S. En changeant l'ordre des vecteurs, le point S peut varier et son lieu est un plan; le plan peut d'ailleurs comprendre tout l'espace ou se réduire à un point; dans ce dernier cas, c'est que les n séries partielles formées par les composantes sont toutes absolument convergentes; ajoutons que, si l'on range les vecteurs dans un ordre quelconque, S_n n'a pas en général de limite, à moins que les n séries partielles ne soient absolument convergentes. Ce que nous venons de dire est en défaut dans un cas où S_n s'éloigne nécessairement à l'infini, dans une direction qui, si elle est déterminée, est seulement assujettie à être à l'intérieur d'un certain cône convexe. Ces différentes propositions se démontrent par un procédé analogue à celui que nous avons employé dans le cas du plan; le principe consiste dans la décomposition de la suite étudiée en $n + 1$ suites partielles.