NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Sur un lieu connu

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 471-474

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__471_0>

[L[1]17a]

SUR UN LIEU CONNU;

PAR UN ABONNÉ.

Par deux points fixes A *et* B *pris sur une conique donnée, on fait passer une circonférence variable, puis l'on mène à ces deux courbes deux tangentes communes, telles que les cordes de contact passent par le point de rencontre de* AB *avec la sécante commune associée* (¹); *trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes?* (CHASLES.)

Le cas particulier où les points A et B sont confondus a été proposé au Concours général en 1844 (*Nouv. Ann.*, 1844, p. 426, 431, 489).

Gérono, après avoir donné une solution géométrique (*Ibid.*, p. 495), a ramené géométriquement le cas général au cas particulier en montrant que le lieu reste le même si la corde AB se déplace parallèlement à elle-même (*Ibid.*, 1851, p. 408). Breton (de Champ) a résolu la question en considérant le point dont on cherche le lieu comme un centre d'homologie : il a remarqué que le problème peut s'étendre à l'espace, en remplaçant la conique et le couple de points par une

---

(¹) La restriction essentielle indiquée ici est souvent omise dans l'énoncé : si on ne la fait pas, le lieu se compose d'une conique et d'une courbe du quatrième ordre (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 122). Si la circonférence variable est remplacée par une conique variable passant par quatre points fixes *quelconques*, le lieu est une courbe du sixième ordre (*Nouv. Ann.*, 1880, p. 184. Note de M. Darboux).

quadrique et une section circulaire (*Ibid.*, 1852, p. 62 et 375).

Plusieurs solutions analytiques ont été données (1863, p. 481; 1864, p. 49; 1873, p. 23; 1880, p. 91). Elles ne diffèrent pas essentiellement les unes des autres, et celle qu'on va lire est empruntée au même fond d'idées que ses devancières.

Soit la conique S, dont l'équation est $f(x, y) = 0$, les axes de coordonnées étant parallèles aux axes de la conique S; soit la conique T doublement tangente à la première, et qui sera formée par la suite des deux tangentes communes considérées dans l'énoncé

$$kf - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0;$$

soit le cercle C, doublement tangent à la conique T,

$$kf - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 + (px + qy + r)^2 = 0,$$

avec deux conditions dont nous n'écrirons pour le moment que la première,

$$(1) \qquad pq = \lambda\mu;$$

les cordes communes à la conique S et au cercle C qui passent au point de rencontre des cordes de contact avec T sont

$$(px - qy - r)^2 - (\lambda x + \mu y + \nu)^2 = 0,$$

et leurs coefficients angulaires seront m et $-m$ si l'on a

$$(2) \qquad (p + qm)^2 - (\lambda + \mu m)^2 = 0,$$

le terme du premier degré en m disparaissant *a priori* en vertu de (1).

Les relations (1) et (2) déterminent p et q; il suffit de prendre

$$p + qm = \lambda + \mu m,$$
$$p \times qm = \lambda \times \mu m;$$

laissant de côté la solution illusoire $p = \lambda$, $q = \mu$, où m n'entre pas, on a la solution

$$p = \mu m, \qquad qm = \lambda.$$

Si l'on achève d'écrire que la conique C est un cercle en supposant

$$f(x, y) = Ax^2 + Cy^2 + \ldots,$$

on a la condition

$$k(A - C) - (\lambda^2 - \mu^2) + (p^2 - q^2) = 0,$$

ou, d'après les expressions trouvées pour p et q,

$$(3) \qquad \frac{m^2}{m^2+1} k(A - C) - (\lambda^2 - \mu^2 m^2) = 0.$$

Si maintenant la conique T est formée des deux tangentes menées à la conique S par un point I de coordonnées α, β, on a

$$k = 4 f(\alpha, \beta), \qquad \lambda = f'_\alpha, \qquad \mu = f'_\beta,$$

et le lieu du point I est la conique représentée par l'équation

$$(4) \qquad \frac{4m^2(A - C)}{m^2+1} f(x, y) - (f'^2_x - m^2 f'^2_y) = 0;$$

cette conique passe aux quatre points de la conique S dont les tangentes ont pour coefficients angulaires m et $-m$.

Si l'on prend l'équation de la conique S sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

l'équation du lieu prend la forme

$$\frac{x^2}{a^2 m^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{c^2}{a^2 m^2 - b^2},$$

où l'on reconnaît une conique homofocale à la conique donnée.

Le lieu ne dépend que de la direction de la corde AB, et non de sa position.