

MAURICE D'OCAGNE

**Sur l'évaluation graphique des
longueurs d'arcs**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 43-45

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__43_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[X4c]

SUR L'ÉVALUATION GRAPHIQUE DES LONGUEURS D'ARCS;

PAR M. MAURICE D'OCAGNE.

Les procédés de l'intégration graphique, appliqués soit la règle à la main, soit au moyen d'un intégraphe, permettent d'obtenir les aires limitées à des contours fermés quelconques. Pour évaluer approximativement une intégrale quelconque par ce moyen, il faut donc la ramener à une détermination d'aire. En ce qui concerne les longueurs d'arcs, M. Collignon a fait connaître la solution suivante (1) :

On a, entre les points M_1 et M_2 , α désignant l'angle de la tangente avec Ox , N la normale limitée à Ox , a une longueur quelconque,

$$s = \int_{M_1}^{M_2} \frac{dx}{\cos \alpha} = \int_{M_1}^{M_2} \frac{N}{y} dx = \frac{1}{a} \int_{M_1}^{M_2} \frac{aN}{y} dx.$$

Or, si l'on porte sur la normale la longueur $MN = a$, et si l'on élève en N à cette normale la perpendiculaire NP , on a précisément

$$\frac{aN}{y} = MP.$$

Donc

$$s = \frac{1}{a} \int_{M_1}^{M_2} MP dx = \frac{\text{aire } M_1 M_2 P_2 P_1}{a}.$$

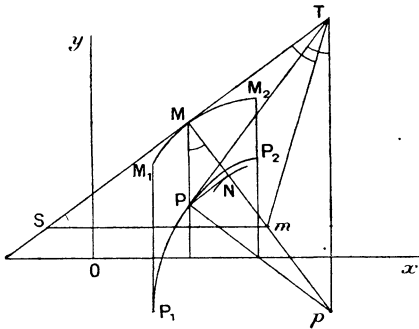
Si donc on évalue graphiquement cette aire par la méthode de M. Massau, en prenant pour base de l'inté-

(1) *Complément du Cours d'Analyse*, p. 17.

gration la longueur a , on voit que l'ordonnée finalement obtenue sera précisément égale à la longueur de l'arc $M_1 M_2$.

Pour effectuer ce tracé avec plus de précision, il est utile d'obtenir, en même temps que chaque point P de la courbe auxiliaire $P_1 P_2$, la tangente en ce point. Voici comment on peut établir la construction de cette tangente :

Le segment MN de la normale étant constant, le point N décrit une courbe parallèle à la courbe $M_1 M_2$,



dont la tangente en N est justement NP , et qui a même centre de courbure m que $M_1 M_2$.

Dès lors, si la tangente et la normale en P à la courbe $P_1 P_2$ coupent respectivement en T et en p la tangente et la normale en M à la courbe $M_1 M_2$, on a, entre les différentielles des arcs décrits simultanément par les points M, N, P ,

$$\frac{d(M)}{d(N)} = \frac{Mm}{Nm}, \quad \frac{d(N)}{d(P)} = \frac{Np}{Pp}, \quad \frac{d(P)}{d(M)} = \frac{PT}{MT};$$

d'où, par multiplication membre à membre,

$$1 = \frac{Mm \cdot PT}{Pp \cdot MT}$$

(45)

ou

$$\frac{Pp}{PT} = \frac{Mm}{MT},$$

ce qui montre que

$$\widehat{MTm} = \widehat{PTp}.$$

Mais le quadrilatère $pPMT$ étant inscrit dans le cercle de diamètre pT , on a

$$\widehat{PTp} = \widehat{PMp}.$$

Menons par le centre de courbure m la parallèle mS à Ox . Nous avons

$$\widehat{PMm} = \widehat{MSm}.$$

Donc, finalement,

$$\widehat{MTm} = \widehat{MSm},$$

et les points S et T sont symétriques par rapport au point M . Ainsi :

La tangente PT cherchée et la parallèle à Ox menée par le centre de courbure m coupent la tangente en M en deux points symétriques par rapport à M .

Si les points S et T sont en dehors des limites de l'épure, il suffit de mener par m une droite dont la direction soit symétrique par rapport à mM de celle de Ox et de joindre, par un des procédés bien connus, le point P au point de rencontre inaccessible de cette droite et de la tangente en M .
