NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LANCELOT

# Détermination d'une courbe algébrique gauche

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 5 (1905), p. 399-410

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__399_1>

[$M^3 1 a$]

# DÉTERMINATION D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE GAUCHE;

PAR M. LANCELOT.

1. Cherchons le degré minimum d'une surface passant par une courbe algébrique gauche de degré $m$.

Soit une surface de degré $p$. En général, elle coupe la courbe donnée en $mp$ points, et, si elle contient $(mp+1)$ points de cette courbe, elle la contient tout entière, si elle n'est pas indécomposable.

La condition nécessaire et suffisante pour que la surface passe par la courbe est donc qu'elle contienne $(mp+1)$ de ses points.

D'autre part, on sait que, en général,

$$\frac{p(p^2+6p+11)}{6} \text{ points}$$

déterminent une surface de degré $p$, et que, par

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6} \text{ points}$$

ne passe, en général, aucune surface de degré $p$. Il faudra donc, en général, que

$$mp + 1 < \frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6},$$

ou que

$$p^3 + 6p^2 + 11p + 6 > 6mp + 6,$$

$$p^3 + 6p^2 - (6m - 11)p > 0,$$

ou

$$p^2 + 6p - (6m - 11) > 0.$$

Ce trinome en $p$ a ses racines de signes contraires si $6m > 11$ ou, $m$ étant forcément entier, si $m \geqq 2$; $p$ étant d'ailleurs entier et positif, il faut donc que $p$ soit plus grand que la racine positive, ou que

$$p > -3 + \sqrt{2(3m-1)}.$$

Le degré minimum cherché est donc supérieur ou au moins égal à la partie entière de $-3 + \sqrt{2(3m-1)}$, augmentée de 1, ou à la partie entière de $\sqrt{2(3m-1)}$, diminuée de 2. Soit

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right]$$

cette partie entière :

$$p \geqq E - 2.$$

Ainsi, le degré minimum d'une surface passant par une courbe du deuxième degré, est

$$-2 + E(\sqrt{2 \times 5}) \quad \text{ou} \quad -2 + E(\sqrt{10}),$$

$-2 + E(\sqrt{10})$ est nul. Donc, quel que soit l'entier $p$, on pourra, par une courbe du deuxième degré, faire passer une surface de degré $p$.

*Exemples.* — 1° En particulier, par une courbe du deuxième degré indécomposable passe toujours un plan : toute courbe du deuxième degré est plane.

La donnée d'une conique située sur une surface de degré $p$ équivaut d'ailleurs, au point de vue de la détermination de cette surface, à $2p+1$ conditions.

2° Soit une courbe du troisième degré

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = E(\sqrt{2\times 8}) = E(\sqrt{16}) = 4.$$

Donc

$$p \geqq 2.$$

Donc, une courbe du troisième degré n'est, en général, pas plane. Par une telle courbe passe toujours une surface du deuxième degré.

La donnée d'une telle courbe équivaut d'ailleurs, pour la détermination de la quadrique, à la donnée de

$$mp+1 = 2\times 3+1 = 7 \text{ points.}$$

Donc, par une cubique gauche, il passe toujours une infinité de quadriques dépendant de deux paramètres. On retrouve ainsi la distinction des cubiques en deux classes :

Cubiques gauches;
Cubiques planes.

3° Soit une courbe du quatrième degré :

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = E(\sqrt{2\times 11}) = E(\sqrt{22}) = 4.$$

Donc

$$p \geqq 4-2, \qquad p \geqq 2.$$

On voit donc que, par une courbe du quatrième degré, il passe une quadrique.

La donnée d'une telle courbe équivaut, pour la détermination de la quadrique, à la donnée de

$$2 \times 4 + 1 = 9 \text{ points}$$

et détermine entièrement cette surface.

Donc, en général, *par une courbe gauche du quatrième degré, il passe une quadrique et une seule : quartique de Steiner.*

On sait d'ailleurs que, si les 9 points sont situés sur la courbe d'intersection de deux quadriques, il passe par ces 9 points un réseau de quadriques, se coupant suivant une courbe gauche du quatrième degré. Donc *il existe une seconde classe de quartiques gauches, intersection de deux quadriques : biquadratiques gauches.*

Enfin la quartique peut être plane.

On retrouve ainsi les trois classes de courbes du quatrième degré, et l'on voit de plus que toute courbe du quatrième degré appartient à l'une de ces trois classes.

4° Soit une courbe du cinquième degré :

$$E\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = E(\sqrt{2 \times 14}) = E(\sqrt{28}) = 5.$$

Donc

$$p \geqq 3.$$

Donc, par une courbe du cinquième degré, ne passe, en général, aucune quadrique.

Par une telle courbe passent des surfaces du troisième degré. La donnée de cette courbe équivaut, pour la détermination de cette surface, à

$$3 \times 5 + 1 = 16 \text{ points},$$

et, comme il faut 19 points pour déterminer une surface cubique, par une courbe du cinquième degré passe, en général, un réseau à trois paramètres de surfaces du troisième degré.

La courbe la plus générale du cinquième degré fait donc partie de l'intersection de deux surfaces cubiques, se coupant en outre suivant une courbe du quatrième degré $(4 + 5 = 9)$.

Il peut arriver que, par la courbe, passe une quadrique : il passera en outre une infinité de surfaces cubiques dépendant d'au moins trois paramètres, et l'on a une seconde classe de courbes du cinquième degré, faisant partie de l'intersection d'une quadrique et d'une surface cubique ayant en plus une droite commune.

Enfin la courbe peut être plane.

D'où trois familles de courbes du cinquième degré.

5° Soit encore une courbe du sixième degré :

$$\mathrm{E}\left[\sqrt{2(3m-1)}\right] = \mathrm{E}(\sqrt{2 \times 17}) = \mathrm{E}(\sqrt{34}) = 5.$$

Donc

$$p \geqq 3.$$

Par une courbe du sixième degré passe, en général, une surface de troisième degré, et pas de surface de degré moindre.

La donnée d'une telle courbe équivaut d'ailleurs, pour la détermination d'une surface cubique, à

$$6 \times 3 + 1 = 19 \text{ points.}$$

Comme, en général, par 19 points, il passe une surface cubique et une seule, il s'ensuit que, en général, par une courbe du sixième degré, il passe une surface cubique et une seule. Il passera d'ailleurs par cette courbe une infinité de surfaces du quatrième degré, et la courbe sera l'intersection de deux surfaces, une du troisième et une du quatrième degré; cette intersection étant du degré $3 \times 4 = 12$ comprendra donc deux courbes du sixième degré.

Il peut arriver que les 19 points ne soient pas tous distincts, au point de vue de la détermination d'une surface du troisième degré. Alors 18 au plus seront distincts, et il passerait par la courbe un faisceau de surfaces cubiques : ces surfaces cubiques ayant en commun une courbe du neuvième degré, il s'ensuit que le nombre maximum de points distincts sera même inférieur à 18. La courbe est alors l'intersection de deux surfaces cubiques, ayant en outre en commun une courbe du troisième degré.

Enfin, la courbe du sixième degré peut être située sur une quadrique : elle sera son intersection par une surface cubique. Ou encore la courbe peut être plane.

Donc, on a ainsi quatre sortes de courbes du sixième degré.

*Remarque.* — On voit que :

Toutes les courbes du premier degré (droite) ou du deuxième degré sont planes;

Toutes les courbes du troisième et du quatrième degrés sont tracées sur des quadriques;

Toutes les courbes du cinquième et du sixième degrés sont tracées sur des surfaces cubiques.

La loi très simple, qui semble en évidence sur ces premiers exemples :

*Toutes les courbes de degré* $2n - 1$ *et* $2n$ *sont tracées sur des surfaces de degré* $n$,

se vérifie encore pour les courbes du septième et du huitième degrés, et pour celles du neuvième et du dixième degrés; à partir de ce point, elle cesse d'être exacte : toutes les courbes de degrés 11, 12, 13 sont tracées sur des surfaces du sixième degré.

On a, en effet,

$$p \geqq \mathrm{E}\left[\sqrt{2(3m-1)}\right]-2,$$

$$m = \begin{cases} 7 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{40})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 4, \\ 8 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{46})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 4, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 9 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{52})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 5, \\ 10 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{58})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 5, \end{cases}$$

$$m = \begin{cases} 11 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{64})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 6, \\ 12 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{70})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 6, \\ 13 \ldots\ldots & p \geqq \mathrm{E}(\sqrt{76})-2 \quad \text{ou} \quad \geqq 6. \end{cases}$$

2. *Nombre des paramètres dont dépend une courbe gauche unicursale de degré m.* — Une courbe algébrique de degré $m$, $C_m$, coupe le plan de l'infini en $m$ points. On peut toujours, en faisant au besoin une transformation homographique, supposer l'un d'eux simple. Soit $\Delta$ la direction dans laquelle ce point se trouve rejeté à l'infini.

Considérons le cylindre $k$ ayant pour directrice la courbe C, et dont les génératrices sont parallèles à la direction $\Delta$. Ce cylindre est de degré $m-1$; car un plan parallèle à ses génératrices coupe la courbe C en un point à l'infini, et en $m-1$ autres points; donc il coupe le cylindre $k$ suivant $m-1$ génératrices.

De plus, sur toute génératrice simple du cylindre $k$ se trouve un point et un seul de la courbe C. En effet, le cylindre $k$ ayant la courbe C pour directrice, sur chacune de ses génératrices se trouve au moins un point de la courbe.

Supposons que sur une génératrice *simple* D se trouvent deux points de la courbe C. Tout plan P passant par cette génératrice coupe le cylindre suivant $m - 2$ autres droites, contenant chacune au moins un point de la courbe : d'où au moins $m - 2$ points communs à la courbe C et au plan P. A ces points il faut ajouter un point à l'infini et les deux points de la génératrice, ce qui ferait $m + 1$ points : ce qui ne se peut.

Cherchons à déterminer la courbe C sur le cylindre $k$. On pourra pour cela se donner l'abscisse $x$ du point de la courbe situé sur chaque génératrice du cylindre $k$.

Supposons que le cylindre $k$ soit déterminé par la direction de ses génératrices, et sa base dans un plan fixe P. Supposons, en outre, que l'on ait pu exprimer les coordonnées courantes de cette base en fonction d'un paramètre, au moyen d'une représentation paramétrique algébrique parfaite : c'est-à-dire telle qu'à toute valeur du paramètre $\lambda$ corresponde un point et un seul de la base, et que, réciproquement, à tout point simple de la base corresponde une valeur et une seule du paramètre $\lambda$. Ces conditions sont remplies pour une courbe unicursale : nous ne considérerons, dans ce qui suit, que des courbes telles que le cylindre $k$ que l'on considère soit unicursal; la position d'une de ses génératrices est alors déterminée par la valeur de $\lambda$ correspondant au point où elle rencontre sa base dans le plan P.

Comme la courbe n'a qu'un point sur chaque génératrice du cylindre $k$, l'abscisse $x$ du point qu'elle possède sur une génératrice $\lambda$ sera liée à $\lambda$ par une relation linéaire en $x$, qui, résolue par rapport à $x$, sera de la forme

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

$f$ et $\varphi$ étant deux polynomes : *la courbe* C *est alors* *elle-même unicursale*. L'$x$ d'un point de la courbe est, par exemple, la longueur de la génératrice qui le comprend, comprise entre ce point et le plan de la base. Donc, les points d'intersection de la courbe et d'un plan parallèle au plan de base sont donnés par l'équation

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)},$$

où $\lambda$ est regardée comme l'inconnue. La courbe étant de degré $m$, il y a $m$ points répondant à la question. L'équation en $\lambda$ est donc de degré $m$, et par suite les polynomes $f$ et $\varphi$ sont de degré $m$.

Enfin, un point de la courbe C peut s'éloigner à l'infini de deux manières :

1° Sur une des $(m-2)$ génératrices du cylindre situées dans le plan de l'infini. Sur chacune d'elles se trouve un point et un seul de la courbe. Soient $\lambda_1$, $\lambda_2$, ..., $\lambda_{m-1}$ les paramètres de ces génératrices : ce sont des quantités parfaitement déterminées.

2° Un point et un seul de la courbe se trouve à l'infini dans la direction des génératrices du cylindre $k$.

L'asymptote correspondante de la courbe est alors une génératrice du cylindre, qui peut d'ailleurs être quelconque. Soit $\lambda_0$ son paramètre.

Or $x$ ne peut devenir infini, et le polynome $\varphi(x)$ ne peut devenir nul que si le point M s'éloigne de l'infini; $\varphi(x)$ a donc pour racines $\lambda_0$, $\lambda_1$, ..., $\lambda_{m-1}$ qui sont des nombres déterminés dès que l'on connaît le cylindre $k$ et la représentation choisie pour la base du cylindre $k$ : le choix de cette représentation n'influe d'ailleurs pas sur la courbe C et, en faisant varier cette représentation, on ne fait pas varier la courbe C. Dans ces conditions, le polynome $\varphi(\lambda)$ ne comprend, à un facteur constant près, que l'on peut faire rentrer dans le polynome $f(\lambda)$, qu'une seule arbitraire, $\lambda_0$ :

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{m-1}).$$

D'ailleurs le polynome $f(\lambda)$ est un polynome arbitraire et contient $(m+1)$ arbitraires; donc l'expression $x = \dfrac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}$ contient $m+2$ paramètres arbitraires.

Inversement, une courbe quelconque définie par le procédé ainsi indiqué est une unicursale de degré $m$. Car prenons pour axe des $x$ une parallèle aux génératrices du cylindre $k$, et pour plan des $yz$ le plan de base de ce cylindre; soient

$$y = \psi(\lambda), \qquad z = \theta(\lambda)$$

les coordonnées courantes de sa base en fonction d'un paramètre : la base étant unicursale de degré $(m-1)$, $\psi$ et $\theta$ sont des fonctions rationnelles de $\lambda$, de degré $m-1$. Comme $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{m-1}$ sont les paramètres des points à l'infini de la courbe, les dénominateurs sont identiques à $(\lambda - \lambda_1)\ldots(\lambda - \lambda_{m-1})$, et l'on peut écrire

$$y = \frac{\psi(\lambda)(\lambda - \lambda_0)}{\varphi(\lambda)}, \qquad z = \frac{\theta(\lambda)(\lambda - \lambda_0)}{\varphi(\lambda)},$$

avec en plus

$$x = \frac{f(\lambda)}{\varphi(\lambda)}.$$

La courbe est donc bien unicursale et du degré $m$.

Ainsi, étant donné un cylindre unicursal quelconque de degré $m-1$, il existe, sur ce cylindre, une infinité de courbes unicursales de degré $m$, dépendant de $m+2$ paramètres.

Reste à chercher de combien de paramètres dépend un tel cylindre. On peut le déterminer par la direction de ses génératrices, d'où deux paramètres, et par sa base dans un plan donné.

Or, cette base est une courbe de degré $m - 1$, ayant le nombre maximum de points doubles que comporte son degré : c'est-à-dire $\frac{(m-2)(m-3)}{2}$. Or, la connaissance d'une courbe de degré $m - 1$ (plane) dépend de $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ paramètres. Le fait qu'elle doit avoir un point double équivaut à dire que, $f(xyz) = 0$ étant son équation homogène, les trois équations

$$f'_x = 0, \qquad f'_y = 0, \qquad f'_z = 0$$

ont un système de solutions; ce qui équivaut à une condition. Le fait qu'elle est unicursale vaut donc

$$\frac{(m-2)(m-3)}{2} \text{ conditions :}$$

et il reste

$$\frac{(m-1)(m+2)-(m-2)(m-3)}{2} = 3m - 4 \text{ paramètres.}$$

Une courbe unicursale plane de degré $m - 1$ dépend donc de $3m - 4$ paramètres.

Exemple :

$m = 2\ldots$ la droite dépend dans le plan de 2 paramètres
$m = 3\ldots$ une conique dépend de 5 paramètres
$m = 4\ldots$ une cubique à point double dépend de 8 paramètres

Un cylindre unicursal de degré $m - 1$ dépend donc de $3m - 2$ paramètres.

Enfin, comme sur un tel cylindre se trouve une infinité de courbes unicursales gauches de degré $m$, dépendant de $m + 2$ paramètres, on voit que :

La détermination d'une courbe unicursale gauche de degré $m$ dépend de

$$3m - 2 + m + 2 = 4m \text{ paramètres.}$$

*Remarque.* — La démonstration ne s'applique pas à la ligne droite. Cependant la formule donne, en y faisant $m = 1$, le nombre des paramètres dont dépend une droite : 4.

On sait que toute courbe du deuxième degré est unicursale, et qu'il en est de même de toute cubique gauche. La formule peut donc s'appliquer pour toutes les courbes du deuxième degré; une conique dépend de $4 \times 2 = 8$ paramètres : 3 pour son plan, 5 pour la déterminer dans son plan.

Elle s'applique aussi à toutes les cubiques gauches : une cubique gauche dépend de $4 \times 3 = 12$ paramètres. Comme un point équivaut, pour la connaissance d'une courbe, à deux conditions, on voit que par 6 points passent un nombre fini de cubiques gauches. On peut voir d'ailleurs qu'il n'y en a qu'une; car le cône de degré 2 qui a pour sommet l'un des 6 points et qui passe par la courbe est parfaitement déterminé, et l'on a 6 cônes du deuxième degré passant par la courbe.

Enfin, on sait que les quartiques se décomposent en trois familles : quartiques de Steiner par lesquelles ne passe qu'une seule quadrique; biquadratiques gauches et quartiques planes. Les quartiques de Steiner sont unicursales. Donc une quartique de Steiner dépend de $4 \times 4 = 16$ paramètres.

Comme on sait que par 8 points passe une biquadratique gauche et une seule, la biquadratique gauche dépend aussi de 16 paramètres.

Le problème du nombre de paramètres dont dépend une courbe gauche est donc complètement résolu pour le quatrième degré.