Nouvelles annales de mathématiques

Solon Chassiotis

Note sur les courbes gauches

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 394-399

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__394_1>

[O3jα]

NOTE SUR LES COURBES GAUCHES;

PAR M. SOLON CHASSIOTIS.

1. Soit à trouver les courbes gauches C, ayant même représentation sphérique des tangentes qu'une courbe arbitraire C' (qui n'est pas une droite ni une hélice) et qui satisfont en outre à la relation

$$F(R, T) = 0, \tag{1}$$

R et T étant les rayons de courbure et de torsion de C.

Nous supposerons que R et T peuvent être exprimées à l'aide d'un paramètre u et que F n'est pas homogène en R et T, ni nul ni infini pour toutes les valeurs de u.

Si C' est une courbe quelconque, on passera d'un point $M'(x', y', z')$ de C' à un autre $M(x, y, z)$ de C, par une transformation de Combescure :

$$(2) \qquad \frac{dx}{dx'} = \frac{dy}{dy'} = \frac{dz}{dz'} = \frac{ds}{ds'} = \frac{R}{R'} = \frac{T}{T'} = \varphi(u);$$

cette transformation n'est définie qu'à la fonction $\varphi(u)$ près : on aura, en prenant une deuxième courbe C'' analogue à C' de rapports analogues aux précédents et si C'' est définie par les formules de Serret (*voir* Note de Serret dans Monge, *Applications de l'Algèbre à la Géométrie,* 5e édit.),

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{dx}{\sin u} = \frac{dy}{-\cos u} = \frac{dz}{\psi(u)} = \frac{ds}{1+\psi^2} \\ &\quad = \frac{R}{\dfrac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}}} = \frac{T}{\dfrac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}} = \varphi_1(u); \end{aligned} \right.$$

comme $\varphi_1(u)$ est arbitraire, on peut se proposer de la déterminer de manière que la courbe C satisfasse à la relation (1). On aura

$$(4) \qquad F\left(\varphi_1 \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}},\ \varphi_1 \frac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}\right) = 0,$$

équation qui détermine la fonction φ_1. Des formules (4) nous déduisons

$$(c) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \int \varphi_1(u) \sin u \, du, \\ y &= -\int \varphi_1(u) \cos u \, du, \\ z &= \int \varphi_1(u) \psi(u) \, du. \end{aligned} \right.$$

Ce sont les coordonnées du point M d'une des courbes cherchées. On remarquera que x et y sont les parties réelles de l'imaginaire

$$-y + ix = \int \varphi_1(u)\, e^{iu}\, du.$$

En sorte que les quadratures (c) se réduisent toujours à deux :

$$\int \varphi_1(u) e^{iu}\, du, \qquad \int \varphi_1(u)\, \psi(u)\, du.$$

On peut même signaler le cas très étendu où ces quadratures se réduisent à une seule, lorsque

$$\varphi_1(u) = \psi(u).$$

Dans ce cas, ψ satisfait à l'équation

$$(4\ bis) \qquad \mathrm{F}\left(\psi' \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2+\psi'^2)^{\frac{1}{2}}},\ \psi' \frac{\psi+\psi''}{1+\psi^2+\psi'^2}\right) = 0,$$

et l'on a

$$z = \frac{1}{2}\psi^2(u).$$

Quant à x et y, ils sont donnés par la quadrature

$$ix - y = \int e^{iu}\, \psi'(u)\, du.$$

Si $\psi(u)$ est un polynome satisfaisant à l'équation (*4 bis*), la quadrature précédente pourra s'effectuer complètement.

Remarques. — I. Les équations (3) ont été employées par M. Bioche pour la démonstration d'une propriété des courbes de J. Bertrand (*Bulletin de la Soc. mathém. de France,* 1889, p. 109).

II. Il existe un autre procédé, dû à M. Darboux, pour trouver *toutes* les courbes satisfaisant à l'équation (1) (*voir* G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. I, p. 43). Les quadratures qui figurent dans les formules de M. Darboux *peuvent aussi se réduire à une seule*, par des changements convenables de variables et des fonctions, dans des cas très étendus.

2. Nous allons, à titre d'application, traiter deux exemples, dont le premier nous fera connaître un exemple de courbe gauche *algébrique* à courbure constante.

Exemple I : *Courbes gauches à rayon de courbure constant* (courbes de Monge). — Ces courbes satisfont à la relation

$$R = a;$$

on a

$$\begin{aligned}
x &= \quad a\int \frac{\sqrt{1+\psi^2+\psi'^2}}{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}\sin u\, du,\\
y &= -a\int \frac{\sqrt{1+\psi^2+\psi'^2}}{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}\cos u\, du,\\
z &= \quad a\int \frac{\sqrt{1+\psi^2+\psi'^2}}{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}}\psi(u)\, du;
\end{aligned}$$

dans le cas où $\psi(u) = \operatorname{tang} u$, les quadratures précédentes deviennent

$$\begin{aligned}
x &= \quad a\int \sin u \cos u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du,\\
y &= -a\int \cos^2 u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du,\\
z &= \quad a\int \sin u \sqrt{1+\cos^2 u}\, du,
\end{aligned}$$

et elles peuvent s'effectuer complètement en prenant

$\frac{u}{2} = t$ comme variable indépendante; la courbe correspondante

$$x = -\frac{4\sqrt{2}}{5} a \cos^5\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{3\sqrt{2}}{5} a \cos\left(\frac{u}{2}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{15} a \cos\left(\frac{3u}{2}\right) - \frac{4\sqrt{2}}{5} a \sin^4\left(\frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{u}{2}\right),$$
$$y = -\frac{2\sqrt{2}}{5} a \sin^5\left(\frac{u}{2}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{5} \sin\left(\frac{u}{2}\right)$$
$$- \frac{\sqrt{2}}{15} a \sin\left(\frac{3u}{2}\right) - \frac{6\sqrt{2}}{5} a \cos^4\left(\frac{u}{2}\right) \sin\left(\frac{u}{2}\right),$$
$$z = -\frac{4\sqrt{2}}{3} a \cos^3\left(\frac{u}{2}\right)$$

est algébrique.

Exemple II : *Courbes de M. Mannheim. — Les normales principales de ces courbes sont binormales d'une autre courbe* (*voir* E. Goursat, *Analyse*, t. I, p. 559, pour la bibliographie de ces courbes).

Comme on a ici

$$\frac{1}{R^2} + \frac{1}{T^2} = \frac{a}{R},$$

il vient

$$\varphi_1(u) = \frac{a(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}}}{(1+\psi^2)^3(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2};$$

par suite, les coordonnées d'un point de ces courbes seront déterminées par les quadratures

$$x = a\int \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}} \sin u \, du}{(1+\psi^2)^3(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2},$$
$$y = -a\int \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}} \cos u \, du}{(1+\psi^2)(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2},$$
$$z = a\int \frac{(1+\psi^2)^{\frac{3}{2}}(1+\psi^2+\psi'^2)^{-\frac{3}{2}} \psi \, du}{(1+\psi^2)^3(1+\psi^2+\psi'^2)+(\psi+\psi'')^2}.$$

Si, par exemple, on a

$$\psi(u) = u,$$

les formules précédentes deviennent

$$x = \quad a\sqrt{2}\int \frac{\sin u}{9u^2+16}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right),$$

$$y = - a\sqrt{2}\int \frac{\cos u}{9u^2+16}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right),$$

$$z = \quad a\sqrt{2}\int \frac{u}{9u^2+16}\, d\left(\frac{u}{\sqrt{u^2+2}}\right).$$