G. LERY

Nouvelles démonstrations du théorème de D'Alembert

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 385-394

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__385_0>

[A3aα]

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DU THÉORÈME DE DALEMBERT [1];

PREMIÈRE DÉMONSTRATION PAR M. G. LERY.

1. Soit $f(z)$ une équation algébrique

$$f(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m = 0,$$

à coefficients réels ou complexes.

Représentons respectivement dans deux plans P et P′ les quantités imaginaires z et $f(z)$. La fonction $f(z)$ est *uniforme*, de sorte que, si z décrit dans le plan P un contour fermé C, l'affixe de $f(z)$ reviendra aussi à son point de départ dans P′, en décrivant un chemin C′; mais l'argument ω de $f(z)$ qu'on suit par continuité le long de C′ pourra avoir varié, si C′ entoure l'origine; cette variation sera d'un multiple de 2π, en supposant que C′ ne passe pas par l'origine, c'est-à-dire que C ne contient aucun point-racine de $f(z)$.

Comme $f(z)$ est *continue*, en prenant pour C une petite courbe tout entière voisine d'un point z_0, on aura pour C′ une petite courbe voisine du point $f(z_0)$, et aussi voisine que l'on veut si C a tous ses points suffisamment près de z_0. En particulier, *lorsque* $f(z_0)$ *n'est pas nul*, on peut choisir C assez proche de z_0

[1] Le théorème de Dalembert faisant de nouveau partie du programme de la classe de Mathématiques Spéciales, nous croyons rendre service à nos lecteurs en publiant de nouvelles démonstrations de cette proposition. N. D. L. R.

pour que C′ ne contienne pas l'origine, et alors ω *ne varie pas* lorsque z décrit C.

Enfin, si deux contours C_1 et C_2 ont une partie commune, soit C le contour total qu'on obtient en la supprimant. Décrivons-les dans le sens positif; la variation de ω le long de C est égale à la somme des variations le long de C_1 et C_2.

2. *On peut trouver dans le plan* P *un contour* Γ *tel que, lorsque z le décrit, l'argument de $f(z)$ varie.* — En effet, en posant $\zeta = \frac{1}{z}$, on a

$$f(z) = \frac{a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_m\zeta^m}{\zeta^m};$$

si ζ décrit, dans le sens négatif, un cercle ayant pour centre l'origine et de rayon assez petit, le numérateur restera voisin de a_0, qu'on suppose non nul, et son argument reviendra à la même valeur; l'argument du dénominateur diminuera de $2m\pi$, et celui de $f(z)$ augmentera de cette quantité. Or ζ décrira le cercle en question si z suit un cercle Γ, de rayon suffisamment grand, dans le sens positif.

3. *Dans le cercle* Γ *existe au moins une racine de* $f(z)$. — Par les diamètres parallèles aux axes de coordonnées, divisons en quatre parties le carré circonscrit à Γ; soient C_1, C_2, C_3, C_4 les contours des portions de Γ comprises respectivement dans ces carrés. Si l'un d'eux contient un point-racine, le théorème est vrai; si cela n'a pas lieu, la variation de ω le long de l'un au moins de ces contours n'est pas nulle, sans quoi la somme des quatre variations, qui est la variation le long de Γ, serait nulle.

Appelons $C^{(1)}$ celui, ou l'un, des contours donnant une variation de ω; divisons le carré circonscrit en quatre parties égales, et ainsi de suite.

Si aucune des lignes de division qu'on emploie successivement ne passe par un point-racine, on obtient une suite de contours $C^{(1)}$, $C^{(2)}$, ..., contenus les uns dans les autres, inscrits dans des carrés tels que le côté de chacun d'eux est moitié de celui du précédent. Ils ont pour limite un point z_0 intérieur à Γ.

C'est un point-racine, car, si $f(z_0)$ n'était pas nul, nous pourrions prendre un des contours C de la suite assez rapproché de z_0 pour que le contour correspondant C' soit très voisin du point $f(z_0)$ et ne contienne pas l'origine dans le plan P' : ω ne subirait pas de variation quand z décrit C, ce qui est impossible.

4. La démonstration précédente est une simple application de la méthode du quadrillage, dont se sert M. Painlevé pour démontrer les théorèmes relatifs à la continuité des fonctions de plusieurs variables et aux intégrales multiples. On peut la considérer comme une extension du procédé, bien connu des élèves, au moyen duquel on démontre qu'une équation algébrique, à coefficients réels et de degré impair, a au moins une racine réelle :

1° Il existe un nombre G tel que l'on ait

$$f(G)f(-G) < 0;$$

2° En divisant le segment $(G, -G)$ en 2, 4, 8, ... parties égales, on définit un point-limite, qui est racine.

DEUXIÈME DÉMONSTRATION PAR M. ÉTIENNE POMEY.

THÉORÈME PRÉLIMINAIRE. — *Toute équation binome a au moins une racine.*

Soit $x^m = a + bi$ l'équation binome considérée.

I. Supposons d'abord m impair.

Si b est nul, l'équation a une racine réelle du signe de a, car, x croissant d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$, x^m croît lui-même d'une manière continue de $-\infty$ à $+\infty$ et passe, en conséquence, une fois et une seule par la valeur a.

Supposons maintenant $b \gtrless 0$. Nous voulons montrer qu'il existe au moins un système de valeurs réelles de y et de z satisfaisant à l'équation $(y + zi)^m = a + bi$.

Or, cette équation envisagée par rapport aux inconnues *réelles* y et z est équivalente au système

$$(y + zi)^m = a + bi, \tag{1}$$

$$(y - zi)^m = a - bi. \tag{2}$$

Ce système peut s'écrire abréviativement

$$A = B, \qquad C = D.$$

Ses solutions réelles en y et z satisfont au système

$$AC = BD, \qquad AD = BC.$$

Mais les solutions réelles de ce dernier vérifient l'équation $A^2 = B^2$, sans qu'on puisse affirmer qu'elles vérifient l'équation $A = 0$. Nous allons cependant montrer que, parmi les solutions réelles du second système, il y en a une qui vérifie $A = B$.

En effet, les équations du second système étant explicitées sont

$$(3)\qquad (y^2+z^2)^m = a^2+b^2,$$

$$(4)\qquad (a-bi)(y+zi)^m-(a+bi)(y-zi)^m = 0.$$

Si l'on change i en $-i$ dans l'équation (4), cette équation ne change pas. Elle est donc indépendante de i, qu'elle ne contient qu'en facteur. En la divisant par i, on obtient une équation à coefficients *réels*, homogène en y et z. Comme d'autre part le terme du plus haut degré en $\frac{y}{z}$ est $-2b\left(\frac{y}{z}\right)^m$ et que b est différent de zéro, cette équation est de degré impair, et par suite elle a au moins une racine réelle en $\frac{y}{z}$; soit x cette racine.

Considérons alors le système

$$\frac{y}{z} = \alpha, \qquad (y^2+z^2)^m = a^2+b^2.$$

Éliminant y entre ces deux équations, on a

$$z^{2m}(\alpha^2+1)^m = a^2+b^2,$$

équation en z qui a deux raisons réelles opposées z_1 et z_2 ($z_2 = -z_1$), dont la valeur absolue est le radical arithmétique

$$\sqrt[2m]{\frac{a^2+b^2}{(\alpha^2+1)^m}}.$$

A ces deux valeurs z_1 et $-z_1$ de z correspondent respectivement les deux valeurs réelles

$$y_1 = \alpha z_1 \qquad \text{et} \qquad y_2 = -\alpha z_1 = -y_1$$

de y.

Cela posé, je vais montrer que l'un de ces systèmes de valeurs est une solution de l'équation (1). En effet, d'après une remarque faite plus haut, ces valeurs vérifient l'équation $A^2 = B^2$, c'est-à-dire l'une des équations $A = B$, $A = -B$, en sorte que l'on a l'une ou l'autre des égalités

$$(5) \qquad (y_1 + z_1 i)^m = a + bi,$$

$$(6) \qquad (y_1 + z_1 i)^m = -(a + bi).$$

L'égalité (6) peut s'écrire

$$(-y_2 - z_2 i)^m = -(a + bi)$$

ou, puisque m est impair,

$$(7) \qquad (y_2 + z_2 i)^m = a + bi.$$

Comme l'une des deux égalités (5), (7) est satisfaite, on voit enfin que l'un des systèmes de valeurs (y_1, z_1), (y_2, z_2) satisfait à l'équation (1).

II. Supposons maintenant m pair.

On a alors

$$m = 2^\mu p,$$

μ étant un certain entier positif et p un certain nombre impair. L'équation proposée peut s'écrire

$$(8) \qquad (x^p)^{2^\mu} = a + bi$$

ou, en posant $(x^p)^{2^{\mu-1}} = u$,

$$u^2 = a + bi.$$

Celle-ci admet les deux racines

$$\pm\left(\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} + \varepsilon i \sqrt{\frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}\right)$$

$$(\varepsilon^2 = 1,\ \varepsilon b > 0).$$

Soit u_1 l'une d'elles. Adoptons pour u la valeur u_1, et considérons l'équation

$$(x^p)^{2^{\mu-1}} = u_1.$$

Posons $(x^p)^{2^{\mu-2}} = u$, l'équation devient

$$u^2 = u_1.$$

Celle-ci a deux racines; je considère l'une d'elles u_2, et j'envisage l'équation

$$(x^p)^{2^{\mu-2}} = u_2,$$

et ainsi de suite. On voit qu'on sera conduit à considérer l'équation

$$x^p = u_\mu,$$

u_μ étant une imaginaire de la forme $\alpha + \beta i$. Comme p est inférieur, on sait, par l'étude faite dans le paragraphe I, que cette équation a une racine au moins. Et, par conséquent, l'équation (8) a une racine.

Théorème de Dalembert. — *Toute équation algébrique a une racine.*

Soit $f(z) = 0$ l'équation considérée. Posons

$$z = x + yi,$$

x et y étant réels. Nous pourrons mettre $f(x+yi)$ sous la forme

$$f(x+yi) = A + Bi,$$

A et B étant deux polynomes entiers en x et y à coefficients réels. On en déduit

$$[\operatorname{mod} f(x+yi)]^2 = A^2 + B^2.$$

$A^2 + B^2$ est, comme A et B, un polynome entier en x

et y à coefficients réels ; d'ailleurs, x et y étant réels, sa valeur n'est jamais négative. Il est donc limité inférieurement et, comme c'est une fonction continue de x et y, il y a un minimum qu'il atteint effectivement au moins pour un système de valeurs x_0, y_0 de x et y. Soient A_0 et B_0 les valeurs que prennent A et B pour $x = x_0$, $y = y_0$. En sorte que l'on a

$$[\operatorname{mod} f(x_0 + y_0 i)]^2 = A_0^2 + B_0^2.$$

Je vais démontrer que l'on a

$$A_0 = B_0 = 0.$$

Il en résultera que l'on a

$$f(x_0 + y_0 i) = 0.$$

Posons, en effet, pour abréger, $x_0 + y_0 i = z_0$. Soient h un nombre positif arbitraire et ω une quantité que nous déterminerons ultérieurement. On a

$$f(z_0 + \omega h) = f(z_0) + \frac{\omega h}{1} f'(z_0) \\ + \frac{\omega^2 h^2}{2!} f''(z_0) + \ldots + \frac{\omega^m h^m}{m!} f^{(m)}(z_0),$$

en désignant par m le degré de $f(z)$.

En posant, d'une manière générale,

$$\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} = A_k B_k i,$$

l'identité précédente peut s'écrire sous la forme

$$f(z_0 + \omega h) = A_0 + B_0 i + \omega h (A_1 + B_1 i) \\ + \omega^2 h^2 (A_2 + B_2 i) + \ldots + \omega^m h^m (A_m + B_m i).$$

Le polynome $f(z)$ étant de degré m, le coefficient $A_m + B_m i$ de $\omega^m h^m$ n'est pas nul, et, par suite, les coefficients $A_1 + B_1 i$, $A_2 + B_2 i$, ..., $A_m + B_m i$ ne sont pas tous nuls : soit $A_p + B_p i$ le premier d'entre eux qui n'est pas nul. Le développement de $f(z_0 + \omega h)$ se réduit alors à

$$\begin{aligned} &f(z_0 + \omega h) \\ &\quad = A_0 + B_0 i + \omega^p h^p (A_p + B_p i) + \ldots + \omega^m h^m (A_m + B_m i). \end{aligned}$$

Cela posé, toute équation binome ayant une racine d'après le théorème préliminaire, il existe une valeur λ de ω satisfaisant à l'équation $\omega^p = \varepsilon$, où ε est ± 1. Et l'on a en conséquence

$$\begin{aligned} &f(z_0 + \lambda h) \\ &\quad = A_0 + B_0 i + \varepsilon h^p (A_p + B_p i) + \ldots + \lambda^m h^m (A_m + B_m i). \end{aligned}$$

Comme λ est une imaginaire de la forme $\alpha + \beta i$, le second membre est une imaginaire de cette même forme, et en mettant en évidence seulement les deux termes du plus bas degré en h dans la partie réelle et dans la partie imaginaire, on aura

$$f(z_0 + \lambda h) = A_0 + \varepsilon A_p h^p + \ldots + i(B_0 + \varepsilon B_p h^p + \ldots).$$

On en déduit successivement

$$\begin{aligned} &[\operatorname{mod} f(z_0 + \lambda h)]^2 \\ &\quad = (A_0 + \varepsilon A_p h^p + \ldots)^2 + (B_0 + \varepsilon B_p h^p + \ldots)^2, \end{aligned}$$

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &[\operatorname{mod} f(z_0 + \lambda)]^2 - (A_0^2 + B_0^2) \\ &\quad = 2\varepsilon (A_0 A_p + B_0 B_p) h^p + \ldots, \end{aligned} \right.$$

les termes non écrits au second membre étant de degré supérieur en h.

De même, en choisissant pour ω la valeur μ d'une racine de l'équation binome $\omega^p = \varepsilon' i$, dans laquelle ε' désigne ± 1, on trouve, par un calcul analogue,

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &[\operatorname{mod} f(z_0 + \mu h)]^2 - (A_0^2 + B_0^2) \\ &\quad = -2\varepsilon' (A_0 B_p - B_0 A_p) h^p + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Or, si, dans les seconds membres de (1) et (2), les coefficients de h^p sont différents de zéro, on peut choisir le nombre positif h de façon que ces seconds membres aient chacun le signe de leur premier terme, et, en prenant convenablement ε et ε', on peut faire en sorte que ce signe soit le signe moins, mais alors on a

$$[\operatorname{mod} f(z_0 + \lambda h)]^2 < A_0^2 + B_0^2$$

et

$$[\operatorname{mod} f(z_0 + \mu h)]^2 < A_0^2 + B_0^2,$$

ce qui est impossible, puisque $A_0^2 + B_0^2$ est le minimum du carré du module de $f(z)$. On a donc

$$A_0 A_p + B_0 B_p = 0 \quad \text{et} \quad A_0 B_p - B_0 A_p = 0.$$

Or $A_p + iB_p$ n'est pas nul, par hypothèse, donc $A_p^2 + B_p^2$ est différent de zéro, et, par suite, ces deux relations exigent qu'on ait

$$A_0 = B_0 = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$