

**Certificats de mathématiques préparatoires  
aux sciences physiques et industrielles**

*Nouvelles annales de mathématiques* 4<sup>e</sup> série, tome 5  
(1905), p. 378-384

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1905\\_4\\_5\\_\\_378\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__378_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

**CERTIFICATS DE MATHÉMATIQUES PRÉPARATOIRES  
AUX SCIENCES PHYSIQUES ET INDUSTRIELLES.**

---

**Caen.**

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Sur la surface dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, est  $z^2 = 2ay$ , déterminer une courbe C dont les tangentes font un même angle  $\theta$  avec le plan des  $xy$ ; construire les projections de C.*

*Lorsque  $\tan\theta$  est  $\frac{1}{2}$ , la projection sur OXY est une cycloïde.*

II. *Deux points M, M' de masse 1 se repoussent avec une force égale à  $6MM'$ ; en outre, chacun d'eux est attiré vers l'origine de deux axes rectangulaires OX, OY, par une force égale à seize fois sa distance au point O. A l'instant initial, les deux points sont sur l'axe des  $x$ , M ayant une abscisse  $3a$  et une vitesse nulle, M' une abscisse  $-a$  et une vitesse  $8a$  parallèle à OY. Chercher, en fonction du temps, les coordonnées  $x, y, x', y'$  des deux points; reconnaître qu'ils suivent une même trajectoire et déterminer cette courbe.*

## SOLUTION.

Le mouvement a lieu dans le plan XOY et ses équations sont linéaires : en les combinant par addition et soustraction, on arrive aux intégrales

$$\begin{aligned} x &= 2a \cos 2t + a \cos 4t, & y &= -2a \sin 2t + a \sin 4t, \\ x' &= -2a \cos 2t + a \cos 4t, & y' &= 2a \sin 2t + a \sin 4t. \end{aligned}$$

Trajectoire commune : hypocycloïde; cercle de rayon  $a$  roulant dans un cercle de rayon  $3a$ . (Juin 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On considère deux courbes C, C' respectivement décrites par les points M, M' dont les coordonnées rectangulaires sont de la forme  $R \cos \theta, R \sin \theta, a\theta$  pour M;  $R \cos \theta', R \sin \theta', -a'\theta'$  pour M'.

Montrer que, si l'on fait  $\theta'$  égal à  $\theta$ , les tangentes à C en M et à C' en M' se coupent en un point P dont le lieu est une développante de cercle orthogonale à MP et à M'P.

L'angle MPM' est constant : dans le cas où il est droit, calculer le volume V engendré par le triangle MPM' et l'aire A décrite par son périmètre quand  $\theta$  croît de 0 à  $\pi$ .

## SOLUTION.

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi^4 R^2}{24} \frac{a^2 + R^2}{a}, \\ A &= \frac{\pi^2 R \sqrt{a^2 + R^2}}{6} \frac{\pi(a + R) + 2\sqrt{a^2 + R^2}}{a}. \end{aligned}$$

II. Mouvement d'un point non pesant assujéti à se mouvoir sur un cône dont les génératrices font avec l'axe un angle de  $30^\circ$  et attiré vers le sommet du cône par une force proportionnelle à la distance.

CALCUL. — Sur une sphère de  $10^m$  de rayon, on considère un triangle ABC; on donne les longueurs des côtés  $b, c$  et l'angle A : calculer les angles B, C et la surface en mètres carrés. (Novembre 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Étant donné sur une sphère un grand cercle (C), de pôles A, A', à un point quelconque M de la sphère on fait correspondre :

1° La projection P de M sur le plan du cercle (C);

2° L'intersection Q de (C) avec le demi-cercle AMA'.

Sur quelle courbe ( $\Gamma$ ) doit se déplacer M pour que les points P et Q décrivent des arcs égaux? Trouver les trajectoires orthogonales des courbes ( $\Gamma$ ) et rectifier l'une de ces trajectoires à partir du cercle (C).

SOLUTION.

( $\Gamma$ ) est une courbe de Viviani; trajectoires :

$$\psi - \psi_0 = \cot \theta.$$

II. On donne deux cercles (C), (C') ayant même axe OO'; deux points M, M' sont assujettis à rester l'un sur le cercle (C), de rayon R, l'autre sur (C'), de rayon  $\frac{1}{2}R$  : ils ont chacun une masse 1 et s'attirent avec une force  $\mu^2 MM'$ . Trouver le mouvement des deux points en supposant leurs vitesses initiales nulles.

CALCUL. — A deux heures sidérales données,  $t, t'$ , une certaine étoile circompolaire a des hauteurs  $h, h'$  et un même azimut  $\alpha$  : calculer cet azimut ainsi que la latitude, supposée boréale, du lieu de l'observation.

(Juillet 1905.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE : I. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE ET ANALYSE. —

1° Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un cercle (C) de rayon R et de centre K, tangent à Oy en O, montrer que le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de O sur les tangentes au cercle (C) est une cardioïde  $\Gamma$ .

2° M et M' étant deux points de ( $\Gamma$ ) tels que l'angle MOM' soit droit, trouver le lieu du milieu du segment MM'.

3° M désignant un point quelconque de ( $\Gamma$ ) et P un point de la droite OM tel que le produit OM.OP soit égal à une constante  $\lambda^2$ , montrer que le point P décrit une

parabole quand M décrit ( $\Gamma$ ); trouver les trajectoires orthogonales des paraboles obtenues en faisant varier  $\lambda$ .

4° La cardioïde ( $\Gamma$ ) rencontre, en dehors de l'origine, l'axe  $Ox$  en un point A et l'axe  $Oy$  en deux points B, B' : calculer l'aire de la surface ( $\Sigma$ ) engendrée par la rotation de l'arc AB autour de  $Ox$ ; calculer aussi le volume compris entre cette surface ( $\Sigma$ ) et un plan mené par O perpendiculairement à  $Ox$ .

5° Calculer l'aire de la partie de la surface de la sphère de centre O et de rayon  $2R$  qui est comprise à l'intérieur d'un cylindre dont la base est la cardioïde ( $\Gamma$ ) et dont les génératrices sont perpendiculaires au plan  $xOy$ ; calculer de même l'aire de la surface latérale du cylindre ainsi limité.

II. MÉCANIQUE. — Réduction d'un système de six vecteurs.

Longueurs des vecteurs :

$$\begin{array}{lll} OA = 2^m, & OB = 1^m, & CD = 3^m, \\ EF = 4^m, & GH = 3^m, & OL = 2^m. \end{array}$$

Les positions respectives des vecteurs sont définies par les données suivantes :  $\widehat{AOB} = 60^\circ$ ; CD et EF sont perpendiculaires au plan AOB, les points C et E sont sur les prolongements de OA et OB, et l'on a

$$OC = 5^m, \quad OE = 3^m;$$

GH, dans le plan AOB, est perpendiculaire à la bissectrice OG de l'angle AOB, et l'on a

$$OG = 6^m;$$

OL est situé dans le plan mené perpendiculairement à AOB par OG, et l'on a

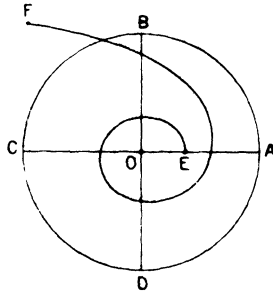
$$\widehat{GOL} = 45^\circ. \quad (\text{Juillet 1905.})$$

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Un petit volant ABCD mobile autour d'un axe vertical O est assimilable à un anneau très mince de rayon R centimètres et de poids P grammes.

Un ressort spiral plat d'élasticité parfaite a l'une de ses extrémités fixée en F et l'autre extrémité attachée en E à l'un des bras OA du volant, à une distance OE =  $\rho$  centimètres de l'axe.

On tourne le volant d'un angle  $\alpha$  radian dans le sens



des aiguilles d'une montre à partir de la position d'équilibre. Le ressort exerce alors sur le bras du volant un effort perpendiculaire de  $f$  grammes.

On abandonne alors sans choc le système à lui-même :

- 1° Étudier le mouvement du volant ;
- 2° Prenant

$$R = 2^{\text{cm}}, 5, \quad \rho = \frac{R}{2}, \quad \alpha = \frac{2\pi}{3}, \quad f = 0^{\text{g}}, 6,$$

déterminer  $P$  de manière que le volant batte la seconde.

NOTA. — On négligera le poids des bras du volant.

II. Une courbe a pour équation par rapport à deux axes rectangulaires

$$x - y = be^{\frac{1}{a}},$$

$a$  et  $b$  étant des longueurs données, dont la première est positive.

1° Construire cette courbe et calculer l'aire qui, dans la région des  $y$  négatifs, est limitée par la courbe, l'axe des  $x$  et la bissectrice de l'angle  $xOy$ .

2° Considérant ensuite  $b$  comme un paramètre variable,

trouver les trajectoires orthogonales des courbes représentées par cette même équation.

ÉPREUVE PRATIQUE. — Calculer la valeur de l'expression

$$\frac{a^{2,157} b^{-\frac{1}{7}}}{\text{arc tang } \theta (c^3 + a \theta \mathcal{L} b)},$$

dans laquelle on a

$$\begin{aligned} a &= 26, & b &= 7,432, & c &= 0,245, \\ & & \theta &= 0,0523. \end{aligned}$$

N.-B. —  $\mathcal{L} b$  signifie logarithme népérien de  $b$ .

(Novembre 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. On donne dans un plan une circonférence de centre  $K$  et de rayon  $a$ , et un point  $A$  sur cette circonférence.

Trouver dans ce plan une courbe  $\Gamma$  dont le rayon de courbure en un point  $M$  soit égal à la corde du cercle  $K$  issue de  $A$  parallèlement à la tangente en  $M$ .

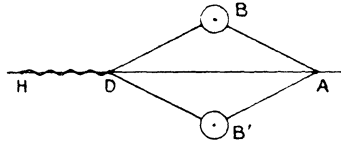
L'axe des  $x$  étant parallèle au diamètre  $AK$ , déterminer les constantes d'intégration de manière que  $\Gamma$  passe par l'origine  $O$  des coordonnées et soit normale en ce point à l'axe des  $x$ .

L'arc de courbe ainsi déterminé ira couper une seconde fois l'axe des  $x$  en un point  $B$  dont on calculera l'abscisse. Trouver la longueur de l'arc de courbe  $OB$ , l'aire comprise entre cet arc et l'axe des  $x$ , les coordonnées du centre de gravité de cette aire.

II. Sur un axe HORIZONTAL animé d'une rotation uniforme  $\omega$  est monté un régulateur à force centrifuge formé d'un losange articulé  $ABB'D$ . Le sommet  $A$  est fixé en un point de l'axe, les sommets  $B$  et  $B'$  portent des masses égales  $M$ , et le sommet  $D$ , qui peut glisser le long de l'axe, est attaché à l'extrémité d'un ressort à boudin dont l'autre extrémité est fixée en un point  $H$  de l'axe. Le ressort exerce une force de  $E$  kilogrammes pour un allongement

égal à l'unité de longueur. Quel sera l'allongement du ressort dans l'état d'équilibre relatif du régulateur?

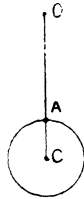
On appellera  $l$  la longueur naturelle du ressort,  $a$  la



longueur des tiges du régulateur, et  $2c + l$  la distance HA.

On négligera le poids des tiges et les frottements.

**ÉPREUVE PRATIQUE.** — Un pendule est formé d'une tige OA très mince et de poids négligeable, soudée à un disque circulaire, homogène, pesant, suivant le prolongement d'un de ses rayons CA. L'axe de suspension, qui passe



en O, est horizontal et perpendiculaire au plan du disque.

On donne :

$$OA = 0^m,753, \quad CA = r = 0^m,228, \quad g = 9^m,81.$$

1° Calculer la durée d'oscillation de ce pendule.

2° On pratique dans le disque un trou circulaire et concentrique. Quel doit être le rayon de ce trou, pour que le pendule ainsi modifié batte la seconde?

(Juillet 1905.)