

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 373-378

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5_373_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Caen.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. Déterminer l'intégrale de l'équation $pq = xy$ qui se réduit à

$$\sqrt{1+y^2} \quad \text{pour} \quad x = 1.$$

SOLUTION.

$$z = x \sqrt{1-y^2}.$$

II. Déterminer une surface dont les asymptotiques se projettent sur le plan des xy suivant les développantes du cercle*

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

SOLUTION.

$$z = Cx + C'y + C'' + e^{-\frac{x^2+y^2}{2a^2} - \alpha}.$$

(Juillet 1905.)

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Lignes asymptotiques de la surface engendrée par la rotation de la courbe $z = f(x)$ tournant autour de Oz .

Application :

$$z = \pm \frac{x}{2a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{3a}{2} \log \frac{x \pm \sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

On construira la courbe méridienne.

ÉPREUVE PRATIQUE. — On considère les surfaces

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2cz \quad \text{et} \quad ax^2 + by^2 = z',$$

et l'on demande :

1° D'étudier la projection sur xOy de l'intersection de ces deux surfaces;

(374)

2° D'évaluer l'aire de la portion de la première surface qui est comprise à l'intérieur de la seconde.

On considérera successivement les deux cas suivants :

$$a > b > 1, \quad a > 1 > b > 0.$$

(Juillet 1905.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Un cercle de rayon donné R a pour centre un point situé sur Ox à la distance x_0 de l'origine O des coordonnées rectangulaires. Ce cercle a pour axe Ox .

Déterminer la surface passant par ce cercle et satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles

$$px + qy = 0.$$

Déterminer les lignes asymptotiques de cette surface.

SOLUTION.

On trouve le conoïde

$$x_0^2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + z^2 = R^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Le point z décrit dans le plan des z un chemin allant du point $z_0 = \sqrt{-1}$ au point

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2} \left(e + \frac{1}{e} \right) \sqrt{-1}$$

sur une chaînette symétrique par rapport à l'axe des y . La lettre e désigne le nombre connu.

Calculer la longueur de ce chemin à 0,001 près.

SOLUTION.

1,175 par défaut.

(Juillet 1905.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — Un cylindre de révolution est représenté par les équations

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t.$$

1° Déterminer une courbe C tracée sur le cylindre, telle que son rayon de courbure vérifie la relation

$$R \sin^2 \varphi = \frac{a}{\sqrt{1+b^2}},$$

où φ est l'angle de la tangente à la courbe avec la génératrice du cylindre et b une constante.

2° Calculer le rayon de courbure, le rayon de torsion et le rayon de la sphère osculatrice en un point de la courbe C obtenue.

3° Démontrer que le rayon de torsion T vérifie la relation

$$T \sin 2\varphi = 2a.$$

4° Déterminer les courbes plus générales tracées sur le cylindre telles que

$$T \sin 2\varphi = 2a + C \sin^2 \varphi.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — 1° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface

$$z = xy^2.$$

2° Déterminer les lignes asymptotiques de la surface

$$z = x^\alpha y^\beta,$$

α et β étant des constantes.

(Juillet 1905.)

Rennes.

ÉPREUVE ÉCRITE : I. CALCUL INTÉGRAL. — On donne l'équation différentielle E_α

$$(E_\alpha) \quad x(x-1) \frac{d^2y}{dx^2} + [(x+2)x - (\alpha+1)] \frac{dy}{dx} + \frac{2\alpha+1}{4} y = 0,$$

où α désigne une constante.

1° Montrer que (E_α) admet deux intégrales y_0 et y_1 telles que

$$y_0 = \varphi(\alpha, x), \quad y_1 = x^{-\alpha} \varphi(-\alpha, x)$$

$\varphi(\alpha, x)$ désignant une série entière en x dont les coefficients dépendent de α , et égale à 1 pour $x = 0$.

2° Trouver la limite vers laquelle tend le rapport $\frac{y_0 - y_1}{\alpha}$ quand α tend vers zéro.

3° Calculer la transformée de E_α définie par le changement de variable $x = \frac{1}{t}$ et par le changement de fonction

$$y = t^{\frac{1}{2}} T,$$

et comparer cette transformée à l'équation $E_{-\alpha}$.

4° Étudier les intégrales de l'équation E_0 à laquelle se réduit E_α , pour $\alpha = 0$, dans le voisinage de chacun des trois points

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = \infty.$$

II. CALCUL DIFFÉRENTIEL. — 1° Vérifier que l'équation

$$z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \text{arc tang } \frac{y}{x} - \text{arc tang } \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

représente la surface développable S dont les plans tangents ont pour équation

$$z = x \sin t + y \cos t + t,$$

t étant un paramètre variable.

2° Trouver l'arête de rebroussement et les lignes de courbure de la surface S . (Juillet 1905.)

SOLUTION.

I. La série $\varphi(\alpha, x)$ s'obtient en faisant

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = \alpha + \frac{1}{2}, \quad c = \alpha + 1$$

dans la série hypergéométrique

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(a-1)\dots(a+n-1) \cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{1 \cdot 2 \dots n \cdot c(c+1)\dots(c+n-1)} x^n.$$

On a

$$\lim_{\alpha=0} \frac{y_0 - y_1}{\alpha} = \varphi(0, x) \log x + 2 \varphi'_\alpha(0, x)$$

et

$$\varphi'_\alpha(0, x) = 2 \sum x^n \left(\frac{1.3\dots(2n-1)}{2.4\dots 2n} \right)^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1} \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{2n} \end{array} \right\}.$$

L'équation E_α admet les deux intégrales

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \varphi\left(-\alpha, \frac{1}{x}\right), \quad \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}+\alpha} \varphi\left(\alpha, \frac{1}{x}\right).$$

Les résultats précédents font connaître un système fondamental d'intégrales de E_0 dans le domaine de chacun des points $x = 0$, $x = \infty$.

Pour avoir un pareil système dans le domaine du point $x = 1$, il suffit de remarquer que l'équation différentielle E_0 ne change pas quand on change x en $1-x$.

E_0 est l'équation différentielle des périodes de l'intégrale elliptique normale de première espèce ($k^2 = x$). En chacun de ses trois points singuliers, l'équation déterminante a une racine double.

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Intégrer le système d'équations différentielles*

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} - 2x + \frac{d^2y}{dt^2} + 10 \frac{dy}{dt} - 11y &= 0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} - \frac{dx}{dt} + 2 \frac{d^2y}{dt^2} - 2y &= 0. \end{aligned}$$

II. *a désignant une constante réelle choisie de façon que l'intégrale*

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{(1+x)^2} dx$$

ait un sens, calculer la valeur de cette intégrale.

III. *On considère l'équation aux dérivées partielles du premier ordre*

$$p^2 - 2pq + 2q^2 - 4z = 0,$$

(378)

où p et q désignent les dérivées partielles de la fonction inconnue z par rapport aux variables indépendantes x et y .

Intégrer cette équation et déterminer une surface intégrale passant par la parabole dont les équations sont

$$x = 0, \quad z = y^2.$$

ÉPREUVE PRATIQUE. — Déterminer la forme générale des courbes représentées en coordonnées polaires (θ, r) par l'équation

$$d\theta = \frac{\alpha^2 r - 1}{r - 5} \sqrt{\frac{r - 2}{r^2 - 19r + 20}} dr,$$

où α désigne une constante réelle. (Juillet 1905.)