

F. GOMES TEIXEIRA

**Sur une formule pour le calcul numérique  
des logarithmes**

*Nouvelles annales de mathématiques* 4<sup>e</sup> série, tome 5  
(1905), p. 36-42

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1905\\_4\\_5\\_36\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5_36_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[D6b]

**SUR UNE FORMULE POUR LE CALCUL NUMÉRIQUE  
DES LOGARITHMES;**

PAR M. F. GOMES TEIXEIRA.

---

Je me propose de donner ici une formule pour le calcul des valeurs des logarithmes des nombres, laquelle me paraît pouvoir être utile en quelques circonstances.

Je considère, pour cela, la fonction rationnelle

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n}$$

et je la décompose en fractions simples ; ce qui donne

$$\frac{1}{t^n(t-a)^n} = \frac{A_1}{t} + \frac{A_2}{t^2} + \frac{A_3}{t^3} + \dots + \frac{A_n}{t^n} \\ + \frac{B_1}{t-a} + \frac{B_2}{(t-a)^2} + \frac{B_3}{(t-a)^3} + \dots + \frac{B_n}{(t-a)^n}.$$

Pour déterminer  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , je développe le binôme  $(h-a)^{-n}$  en série ordonnée suivant les puissances de  $h$ , ce qui donne

$$(h-a)^{-n} = \frac{(-1)^n}{a^n} \left[ 1 + \binom{n}{1} \frac{h}{a} \right. \\ \left. - \binom{n+1}{2} \frac{h^2}{a^2} + \binom{n+2}{3} \frac{h^3}{a^3} + \dots \right. \\ \left. + \binom{2n-2}{n-1} \frac{h^{n-1}}{a^{n-1}} + \dots \right].$$

On a donc

$$A_1 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}, \\ A_2 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-2}} \binom{2n-3}{n-2}, \\ A_3 = \frac{(-1)^n}{a^{2n-3}} \binom{2n-4}{n-3}, \\ \dots, \\ A_{n-2} = \frac{(-1)^n}{a^{n+2}} \binom{n+1}{2}, \\ A_{n-1} = \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} \binom{n}{1}, \\ A_n = \frac{(-1)^n}{a^n}.$$

Pour déterminer  $B_1, B_2, B_3, \dots, B_n$ , on doit poser  $t = a + h$  dans la fraction  $\frac{1}{t^n}$ , et développer le résultat

suivant les puissances de  $h$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
& (\alpha + h)^{-n} \\
&= \frac{1}{\alpha^n} \left[ 1 - \binom{n}{1} \frac{h}{\alpha} + \binom{n+1}{2} \frac{h^2}{\alpha^2} - \binom{n-2}{3} \frac{h^3}{\alpha^3} + \dots \right. \\
&\quad \left. + (-1)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} \frac{h^{n-1}}{\alpha^{n-1}} + \dots \right];
\end{aligned}$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
B_1 &= \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1}, \\
B_2 &= \frac{(-1)^{n-2}}{\alpha^{2n-2}} \binom{2n-3}{n-2}, \\
B_3 &= \frac{(-1)^{n-3}}{\alpha^{2n-3}} \binom{2n-4}{n-3}, \\
&\dots\dots\dots \\
B_{n-2} &= \frac{(-1)^2}{\alpha^{n+2}} \binom{n+1}{2}, \\
B_{n-1} &= \frac{(-1)}{\alpha^{n+1}} \binom{n}{1}, \\
B^n &= \frac{1}{\alpha^n}.
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^n (t-\alpha)^n} &= \frac{(-1)^n}{\alpha^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t-\alpha} \right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{\alpha^{2n-2}} \binom{2n-3}{n-2} \left( \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t-\alpha)^2} \right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{\alpha^{2n-3}} \binom{2n-4}{n-3} \left( \frac{1}{t^3} - \frac{1}{(t-\alpha)^3} \right) \\
&\dots\dots\dots \\
&+ \frac{(-1)^n}{\alpha^{n+1}} \binom{n+1}{2} \left( \frac{1}{t^{n-2}} + (-1)^{n-2} \frac{1}{(t-\alpha)^{n-2}} \right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{\alpha^{n+2}} \binom{n}{1} \left( \frac{1}{t^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(t-\alpha)^{n-1}} \right) \\
&+ \frac{(-1)^n}{\alpha^n} \left( \frac{1}{t^n} + (-1)^n \frac{1}{(t-\alpha)^n} \right).
\end{aligned}$$

En intégrant maintenant les deux membres de cette



Mais, d'un autre côté, on a

$$\int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n} < \frac{1}{x^n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n},$$

et, par suite, en représentant par  $R_n$  le dernier terme de l'égalité précédente,

$$R_n = a^{2n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\dots n} \int_x^\infty \frac{dt}{t^n(t-a)^n}$$

$$< a^{2n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\dots n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{x^n(x-a)^{n-1}}.$$

On voit, au moyen de cette inégalité, que  $R_n$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini, si  $x \geq 2a$ ; et, dans ce cas, on peut donc écrire

$$\log x - \log(x-a)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ a \frac{n-1}{2n-2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} \right) \right.$$

$$+ \frac{a^2}{2} \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-a)^2} \right)$$

$$+ \frac{a^3}{2} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)} \left( \frac{1}{x^3} + \frac{1}{(x-a)^3} \right)$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ \frac{a^{n-2}}{n-2} \frac{(n-1)(n-2)\dots 3.2}{(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)} \left( \frac{1}{x^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(x-a)^{n-2}} \right)$$

$$\left. + \frac{a^{n-1}}{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots 2.1}{(2n-2)(2n-3)\dots n} \left( \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{(x-a)^{n-1}} \right) \right].$$

Cette formule, que nous croyons nouvelle, sans en être certain, est celle que nous nous proposons de démontrer. Elle donne la valeur de la différence entre les logarithmes des nombres  $x$  et  $x - a$  avec une



On voit, de la même manière, que la différence des logarithmes des nombres  $x$  et  $x - 1$  peut être représentée approximativement par l'expression

$$\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} \right) + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right)$$

avec une erreur inférieure à  $\frac{1}{12 \cdot 10^5}$ , quand  $x > 10$ ,  
à  $\frac{1}{12 \cdot 10^{10}}$ , quand  $x > 100$ , etc.

Parmi les formules qui résultent de la formule générale précédemment écrite, nous indiquerons encore la suivante

$$\begin{aligned} & \log \frac{x+1}{x-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ 2 \frac{n-1}{2n-2} \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right) \right. \\ & \quad + \frac{2^2}{2} \frac{(n-1)(n-2)}{(2n-2)(2n-3)} \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2} \right) \\ & \quad + \frac{2^3}{3} \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{(2n-2)(2n-3)(2n-4)} \left( \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3} \right) \\ & \quad + \dots \\ & \quad + \frac{2^{n-2}}{n-2} \frac{(n-1)(n-2)\dots 3 \cdot 2}{(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)} \left( \frac{1}{(x+1)^{n-2}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(x-1)^{n-2}} \right) \\ & \quad \left. + \frac{2^{n-1}}{n-1} \frac{(n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{(2n-2)(2n-3)\dots n} \left( \frac{1}{(x+1)^{n-1}} + \frac{(-1)^n}{(x-1)^{n-1}} \right) \right] \end{aligned}$$

qu'on obtient en y remplaçant  $x$  par  $x+1$  et en posant  $a = x$ .

Cette formule a lieu quand  $x > 3$  et donne  $\log \frac{x+1}{x-1}$  avec une erreur inférieure à

$$\frac{2^{2n-1} \cdot (n-1)(n-2)\dots 2 \cdot 1}{(2n-2)(2n-3)\dots n} \frac{1}{n-1} \frac{1}{(x+1)^n (x-1)^{n-1}}.$$