NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

GEORGES REMOUNDOZ

Sur les rapports hyperanharmoniques

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 364-366

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__364_0>

[K7a]

SUR LES RAPPORTS HYPERANHARMONIQUES;

PAR M. GEORGES REMOUNDOZ.

I. Dans un article précédent [1] nous avons établi une extension de la notion du rapport anharmonique de quatre quantités au cas de $2n$ quantités, n étant un entier quelconque.

Les nouveaux rapports (rapports hyperanharmoniques) sont des quotients de deux produits de n différences; chacune des $2n$ quantités ne figure qu'une fois dans le numérateur et le dénominateur, mais toutes y figurent dans chacun des termes. C'est là le mécanisme de leur formation et le fait qui entraîne toutes les propriétés de ces rapports.

Il ne faut pas croire que les rapports hyperanharmoniques, tels que je les ai définis, ne sont que des produits de rapports anharmoniques de quatre quantités.

La plupart d'entre eux sont des expressions qui ne sont pas du tout réductibles aux rapports anharmoniques usuels.

Supposons, par exemple, que le numérateur contienne la différence $y_1 - y_2$ et le dénominateur la différence $y_1 - y_3$.

Alors, si y_3 figure dans le numérateur par la différence $y_3 - y_k$ ($k \neq 1, 2, 3$), il faut que y_2 soit combiné avec y_k dans le dénominateur pour que l'on puisse

---

[1] *Voir* ce Recueil, mars 1904.

former un rapport hyperanharmonique réductible aux rapports harmoniques (c'est-à-dire produit de tels rapports). Autrement, le rapport obtenu est bien irréductible ([1]).

Ce sont ceux qui nous intéressent surtout.

L'évaluation du nombre des rapports *irréductibles* est facile à faire; je laisse au lecteur le soin de la faire.

II. Les propriétés des rapports hyperanharmoniques sont tout à fait analogues à celles des rapports harmoniques.

Soit

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = \frac{P(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})}{Q(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})}$$

un tel rapport.

Faisons la transformation homographique

$$y_i = \frac{\alpha z_i + \beta}{\gamma z_i - \delta} \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, 2n).$$

On aura

$$P(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)^n \frac{P(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)\ldots(\gamma z_{2n} + \delta)},$$

$$Q(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})$$
$$= (\alpha\delta - \beta\gamma)^n \frac{Q(z_1, z_2, \ldots, z_{2n})}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_2 + \delta)\ldots(\gamma z_{2n} + \delta)}.$$

Il en résulte

$$R(y_1, y_2, \ldots, y_{2n}) = R(z_1, z_2, \ldots, z_{2n}).$$

Les rapports hyperanharmoniques ne changent pas,

([1]) Dans le cas de $n = 3$, tous les rapports réductibles sont nécessairement des rapports harmoniques (c'est-à-dire qu'ils ne renferment que quatre quantités). On s'en aperçoit immédiatement.

quand on effectue sur tous les y_i une transformation homographique quelconque.

III. Si les $2n$ droites OM_1, OM_2, OM_n, ..., OM_{2n} sont coupées par une sécante aux points M_1, M_2, ..., M_n, ..., M_{2n} les rapports hyperanharmoniques de ces $2n$ points restent les mêmes, quelle que soit cette sécante.

La démonstration de ce théorème se fait au moyen du précédent. On passe d'une sécante à une autre par une transformation homographique.

Quant à la définition du rapport hyperanharmonique de $2n$ points M_1, M_2, ..., M_{2n} situés sur une droite, elle se fait ou bien au moyen de leurs abscisses relatives à une origine, ou bien par les segments M_iM_j, d'une façon évidente.

Chacun des termes du rapport sera un produit de n segments M_iM_j n'ayant aucune extrémité commune.

IV. Je remarque maintenant que la formule donnée dans l'article précédent pour l'évaluation du nombre des rapports hyperanharmoniques de $2n$ quantités tient compte aussi des dégénérescences, c'est-à-dire des rapports ne dépendant que de $2n_1$ quantités ($n_1 < n$) ou encore des rapports anharmoniques.

Soit N_n le nombre fourni par cette formule; le nombre des rapports hyperanharmoniques de $2n$ quantités, proprement dits, est égal à $N_n - N_{n-1}$. Si l'on retranche de ce nombre le nombre des rapports *réductibles* (produits de rapports anharmoniques), on obtient le nombre des rapports de $2n$ quantités, qui nous intéressent essentiellement.