

T. HAYASHI

**Un théorème relatif aux valeurs moyennes**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 5  
(1905), p. 355-357

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1905\\_4\\_5\\_\\_355\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__355_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[A1b et I1]

**UN THÉORÈME RELATIF AUX VALEURS MOYENNES;**

PAR M. T. HAYASHI, à Tokio.

---

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2<sup>e</sup> série, t. XXVI, p. 281-284), M. Durand a prouvé un théorème relatif aux valeurs moyennes et M. G. Darboux en a donné une autre démonstration.

Voici une proposition analogue.

Soient  $a_1, a_2, \dots, a_n$   $n$  nombres positifs tous diffé-

rents, et soit  $P_n^r$  le produit de toutes les sommes de  $r$  quelconques de ces  $n$  nombres. Il y a

$$C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

telles sommes. Posons

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{r}}}{r} = N_r.$$

On a alors

$$N_1 < N_2 < \dots < N_r < N_{r+1} < \dots < N_n.$$

Supposons, en effet, que le théorème soit vrai pour  $n$  nombres, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{r}}}{r} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{1}{r+1}}}{r+1} \quad (r \leq n-1),$$

et remplaçons, dans cette inégalité, successivement  $a_1, a_2, \dots, a_n$  par  $a_{n+1}$ . Multiplions les  $n+1$  inégalités ainsi obtenues (y compris la précédente) membres à membres, et nous obtenons

$$\frac{(\prod P_n^r)^{\frac{1}{r^{n+1}}}}{r^{n+1}} < \frac{(\prod P_{n+1}^{r+1})^{\frac{1}{(r+1)^{n+1}}}}{(r+1)^{n+1}} \quad (r \leq n-1).$$

Or, d'une part,  $\prod P_n^r$  comprend  $(n+1)C_n^r$  facteurs, et, d'autre part, le produit contient symétriquement tous les facteurs de  $P_{n+1}^r$  qui sont au nombre de  $C_{n+1}^r$ . On a donc

$$\prod P_n^r = (P_{n+1}^r)^{\frac{(n+1)C_n^r}{C_{n+1}^r}},$$

et, d'une façon analogue,

$$\prod P_{n+1}^{r+1} = (P_{n+1}^{r+1})^{\frac{(n+1)C_n^{r+1}}{C_{n+1}^{r+1}}}.$$

On en conclut que

$$\frac{(P_{n+1}^r)^{\frac{n+1}{r}}}{r^{n+1}} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{n+1}{r+1}}}{(r+1)^{n+1}},$$

et, par suite,

$$\frac{(P_{n+1}^r)^{\frac{1}{r}}}{r} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{1}{r+1}}}{r+1},$$

lorsque  $r \leq n - 1$ .

Cette inégalité est, d'ailleurs, évidente lorsque  $r = n$ .

Le théorème étant vrai pour  $n = 2$  est, par suite, général.