NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

T. HAYASHI

Un théorème relatif aux valeurs moyennes

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 355-357

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__355_1>

[A1b et I1]

UN THÉORÈME RELATIF AUX VALEURS MOYENNES;

PAR M. T. HAYASHI, à Tokio.

Dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. XXVI, p. 281-284), M. Durand a prouvé un théorème relatif aux valeurs moyennes et M. G. Darboux en a donné une autre démonstration.

Voici une proposition analogue.

Soient a_1, a_2, ..., a_n n nombres positifs tous différents, et soit P_n^r le produit de toutes les sommes de r quelconques de ces n nombres. Il y a

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

telles sommes. Posons

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} = N_r.$$

On a alors

$$N_1 < N_2 < \ldots < N_r < N_{r+1} < \ldots < N_n.$$

Supposons, en effet, que le théorème soit vrai pour n nombres, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{(P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r} < \frac{(P_n^{r+1})^{\frac{1}{C_n^{r+1}}}}{r+1} \qquad (r \leqq n-1),$$

et remplaçons, dans cette inégalité, successivement a_1, a_2, $\ldots$, a_n par a_{n+1}. Multiplions les $n+1$ inégalités ainsi obtenues (y compris la précédente) membres à membres, et nous obtenons

$$\frac{(\Pi P_n^r)^{\frac{1}{C_n^r}}}{r^{n+1}} < \frac{(\Pi P_n^{r+1})^{\frac{1}{C_n^{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}} \qquad (r \leqq n-1).$$

Or, d'une part, ΠP_n^r comprend $(n+1)C_n^r$ facteurs, et, d'autre part, le produit contient symétriquement tous les facteurs de P_{n+1}^r qui sont au nombre de C_{n+1}^r. On a donc

$$\Pi P_n^r = (P_{n+1}^r)^{\frac{(n+1)C_n^r}{C_{n+1}^r}},$$

et, d'une façon analogue,

$$\Pi P_n^{r+1} = (P_{n+1}^{r+1})^{\frac{(n+1)C_n^{r+1}}{C_{n+1}^{r+1}}}.$$

On en conclut que

$$\frac{(P_{n+1}^{r})^{\frac{n+1}{C_{n+1}^{r}}}}{r^{n+1}} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{n+1}{C_{n+1}^{r+1}}}}{(r+1)^{n+1}},$$

et, par suite,

$$\frac{(P_{n+1}^{r})^{\frac{1}{C_{n+1}^{r}}}}{r} < \frac{(P_{n+1}^{r+1})^{\frac{1}{C_{n+1}^{r+1}}}}{r+1},$$

lorsque $r \leqq n-1$.

Cette inégalité est, d'ailleurs, évidente lorsque $r = n$.

Le théorème étant vrai pour $n = 2$ est, par suite, général.