NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

A. SAINTE-LAGUË
J. HAAG

Représentation de cercles par des points

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 337-355
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__337_0>

[P6f]

REPRÉSENTATION DE CERCLES PAR DES POINTS;

Par MM. A. SAINTE-LAGUE et J. HAAG.

I. — Définition de la représentation.

Nous ne voulons pas traiter ici le problème le plus général de la représentation par des points des cercles du plan ou même des sphères de l'espace. Cette étude a été faite en particulier par MM. Darboux et Sophus Lie. Nous voulons montrer simplement, sur un cas particulier, comment on peut rattacher aux propriétés des cercles de nombreuses propriétés des points de l'espace ou inversement.

Soient π le plan considéré et P un paraboloïde de révolution tangent au plan π en son sommet O. Si l'on prend un cercle C quelconque du plan, le cylindre droit ayant ce cercle pour base coupe le paraboloïde suivant une conique dont le plan a pour pôle c par rapport au paraboloïde; nous dirons que c est le point représentatif du cercle C ou, plus simplement, que c est l'axial du cercle C.

On obtient encore l'axial d'un cercle en portant sur l'axe de ce cercle, à partir de son centre, un segment égal au quotient de la puissance de O par rapport au cercle C par le double du paramètre du paraboloïde, ce segment étant au-dessus de π, si la puissance considérée est positive, au-dessous dans le cas contraire.

II. — Familles simples de cercles.

On verrait très aisément à quoi correspondent les familles les plus simples de cercles. Nous ne ferons qu'énoncer les principaux résultats.

Les cercles-droites ont leurs axiaux à l'infini et inversement. Les cercles-points ont leurs axiaux sur le paraboloïde P et inversement.

A des cercles concentriques correspondent les points de leur axe commun, les points de cet axe intérieurs au paraboloïde correspondant d'ailleurs à des cercles imaginaires.

Les cercles orthogonaux à un cercle fixe ω de centre O ont leurs axiaux sur le plan coupant P suivant un cercle égal à ω, plan parallèle au plan π.

III. — Cercles tangents.

Si deux cercles sont tangents, leurs axiaux sont sur une tangente à P, le point de contact de cette droite avec P étant projeté sur π au point de contact des deux cercles. La position relative des axiaux et du point de contact dans l'espace indique d'ailleurs la nature du contact.

Les cercles tangents au cercle A d'axial α ont donc leurs points représentatifs sur le cône de sommet α circonscrit au paraboloïde, les points de ce cône situés sur P correspondant aux points de A et les points à l'infini aux tangentes à A.

En particulier, les cercles passant par un point fixe ont leurs axiaux dans un plan tangent à P. Les réciproques de ces diverses propriétés sont d'ailleurs exactes.

IV. — Cercles homothétiques.

Les axiaux des cercles homothétiques à un cercle donné A par rapport à un point ω sont dans le plan vertical contenant l'axe de A et le point ω. Leur lieu, dans ce plan, est une parabole définie par la direction de son axe qui est vertical, par l'axial de A et par le point où la verticale de ω coupe le paraboloïde P, point où elle lui est tangente.

Prenons les deux droites auxquelles restent tangents tous les cercles considérés. Les axiaux des cercles tangents à une droite étant sur un cylindre circonscrit au paraboloïde, on voit que, ici, on aura à prendre une des deux paraboles d'axe vertical et tangentes à P qui composent l'intersection de ces cylindres. Le choix sera aisé en remarquant que les deux familles de cercles tangents aux deux droites se distinguent par le lieu de leurs centres.

La définition de l'axial d'un cercle au moyen de sa cote montre que l'on a la propriété suivante :

Si θ est le cercle pour lequel la puissance de O est minimum (cercle dont l'axial est au sommet de la parabole), deux cercles de même puissance par rapport à O ont leurs centres équidistants de celui du cercle θ.

V. — Cercles orthogonaux.

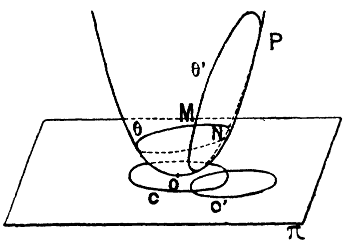
A deux cercles orthogonaux correspondent deux points conjugués par rapport au paraboloïde P (*fig.* 1).

Prenons, en effet, les deux cercles orthogonaux C et C' et soient θ et θ' les intersections avec P des cylindres les admettant pour sections droites. M et N étant les points communs à θ et θ', la tangente à θ en M coupe l'axe du cylindre C' et coupe aussi la droite D conjuguée de MN par rapport à P. Or D passe par le pôle du plan de θ' par rapport à P, qui est sur l'axe de C'; on en déduit que la tangente en M à θ passe par ce pôle qui se trouve ainsi dans le plan θ.

Les cercles orthogonaux à un cercle C d'axial c ont leurs axiaux dans le plan polaire de c, et inversement. Ici encore on distingue immédiatement les cercles réels des cercles imaginaires.

Les cercles d'un faisceau ont leurs axiaux sur une

Fig. 1.



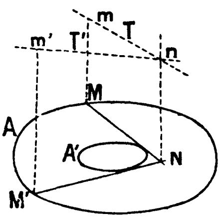
droite et les cercles du faisceau orthogonal ont les leurs sur la droite conjuguée de la première par rapport au paraboloïde.

VI. — Cercles coupant, sous un angle donné, un cercle donné.

Les cercles coupant un cercle A sous un angle V ont leurs axiaux sur une quadrique réglée circonscrite à P tout le long de la conique α projetée sur le plan donné suivant le cercle A.

Considérons les cercles coupant sous l'angle V au point M le cercle A; leurs centres sont sur une droite MN faisant avec le rayon de M l'angle V et tangente, par suite, à un cercle A′ indépendant du point M considéré (*fig.* 2). Ces cercles ont leurs axiaux sur la

Fig. 2.



tangente T au paraboloïde au point m où la verticale de M le coupe et située dans le plan vertical MNm.

On obtient ainsi deux familles de génératrices pour la surface lieu de ces droites, suivant qu'on prend l'une ou l'autre des tangentes issues de M au cercle A′. Nous allons voir que deux tangentes de familles différentes T et T′ se coupent. Soit M′N la seconde tangente à A′ fournissant T′; T et T′ coupent toutes deux la verticale du point N et, de plus, la droite conjuguée de mm'. Cette dernière étant le lieu des axiaux des cercles passant par M et M′ coupe également cette verticale. Donc T et T′ se coupent en un point n de cette verticale.

On voit que, si l'on prend trois génératrices d'un même système, toutes les génératrices de l'autre système les coupent. Le lieu de ces génératrices est donc une quadrique dont on a immédiatement les propriétés ci-dessus.

Si nous considérons l'intersection de la quadrique Q et de π, nous voyons que :

Les cercles coupant le cercle A *sous l'angle* V *et qui passent par un point fixe* O *ont leurs centres sur une* *conique dont un foyer est en O. Il en est de même plus généralement de tous les cercles ayant même puissance par rapport à un point fixe.*

Les cas particuliers où V est nul ou égal à un droit redonneraient des propriétés connues.

Si l'on considère l'ensemble des cercles C coupant deux cercles donnés A et A′ sous des angles donnés V et V′, il existe une infinité de cercles coupant tous les cercles C sous un angle constant, ces cercles font partie d'un faisceau ponctuel.

Il suffit, pour le voir, de remarquer que les quadriques passant par l'intersection des quadriques Q et Q′, lieu des axiaux des cercles C coupant A sous l'angle V ou A′ sous l'angle V′, sont toutes circonscrites à P le long de coniques ayant en commun deux points M et N. On en déduit que les cercles correspondant à ces diverses quadriques et qui coupent sous des angles constants les cercles C ont leurs axiaux sur la droite conjuguée de MN par rapport à P.

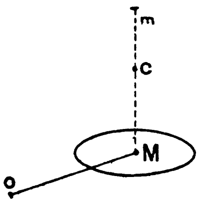
Il y a, en particulier, deux cercles tangents à tous les cercles C. En remarquant que l'intersection des deux quadriques Q et Q′ se compose de deux coniques, on voit d'ailleurs que les cercles C se groupent en deux familles. Il y a un cercle orthogonal à chacune des deux familles. Le lieu des centres des cercles d'une même famille est une conique.

VII. — Cercle de rayon donné.

Le lieu des axiaux des cercles ayant un rayon R est un paraboloïde de révolution déduit de P par une translation parallèle à l'axe de ce dernier.

Prenons un cercle C de centre M et soit *d* la distance OM, la cote de l'axial du cercle-point M est égale au quotient de d^2 par le double paramètre de P (*fig.* 3). Si l'on cherche la cote de l'axial de C, on voit

Fig. 3.



que la différence de cote mc est égale au quotient de R^2 par le même double paramètre.

On pourrait transformer des propriétés bien connues des cercles de rayons égaux pour en déduire des propriétés des paraboloïdes.

Considérons, par exemple, le paraboloïde déduit de P par une translation quelconque parallèle à l'axe et α étant un point arbitraire de P′ remarquons que le cône circonscrit à P de sommet α coupe P′ suivant une certaine conique θ' dont le plan coupe P suivant une conique homothétique et concentrique θ.

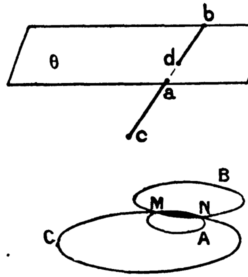
La propriété bien connue de l'existence de six cercles de même rayon tangents à un autre cercle ayant encore le même rayon montre ici que les deux coniques θ et θ' admettent un hexagone, circonscrit à θ et inscrit dans la conique θ'.

VIII. — Inversion.

Prenons deux cercles A et B du plan π inverses l'un de l'autre par rapport au cercle d'inversion C. a, b, c étant les axiaux de ces trois cercles, ces trois points seront en ligne droite, et, si d désigne le point où cette droite coupe le plan polaire θ de c par rapport à P, les segments cd et ab sont conjugués harmoniques.

Pour le montrer, il suffit de considérer les cercles A, B, C et le cercle orthogonal à C aux points où A et B le coupent : M, N (*fig.* 4). On n'a plus qu'à

Fig. 4.



remarquer que les centres de ces quatre cercles forment une division harmonique sur la perpendiculaire à MN en son milieu.

On voit que, dans le plan, l'inversion des cercles par rapport au cercle C se ramène dans l'espace à une homologie de centre c et de plan θ. Ceci montre, par exemple, que l'ensemble des cercles coupant le cercle C sous un angle donné se reproduit identique à lui-même par l'inversion, etc.

IX. — Courbes anallagmatiques.

Prenons une courbe quelconque M et considérons-la comme un lieu de centres de cercles nuls : les axiaux de ces cercles donnent une courbe m, projection cylindrique de M sur le paraboloïde P. Prenons de même la courbe M′ inverse par rapport au cercle C de la précédente et sa projection m' sur P. D'après ce qui précède, m' sera la seconde courbe d'intersection de P avec le cône de sommet c ayant pour base la courbe m.

Si, plus généralement, nous considérons la courbe *d'intersection avec* P *d'un cône quelconque de sommet c, elle sera projetée sur le plan* π *suivant une courbe admettant pour cercle d'inversion le cercle* C *d'axial c, courbe qui sera donc anallagmatique.*

X. — Quartiques bicirculaires.

En particulier, une biquadratique gauche tracée sur P pouvant être placée de quatre manières différentes sur un cône du second degré, donnera, par projection, une quartique qui sera quatre fois anallagmatique.

On peut remarquer l'analogie de ce procédé d'étude des quartiques bicirculaires avec celui qu'indique Duporcq dans ses *Éléments de Géométrie moderne.* Nous verrons plus loin à quoi tient cette analogie. On retrouverait d'ailleurs aisément toutes les propriétés des quartiques bicirculaires (1).

Montrons d'abord l'existence des coniques défé-

---

(1) Les théories précédentes permettent d'avoir aisément la condition pour qu'une quartique ait un point double à distance finie.

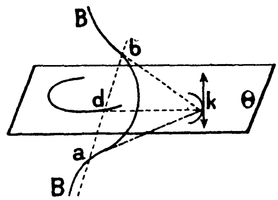
Si l'on considère les cercles dont les axiaux sont sur une conique fixe θ, ces cercles sont orthogonaux au cercle fixe ayant pour axial le pôle du plan de θ par rapport à P, et leur enveloppe est évidemment une quartique bicirculaire, projection, comme on le sait, d'une biquadratique gauche tracée sur P.

Si l'on veut que cette quartique circulaire ait un point double à distance finie, il faut et il suffit que la biquadratique ait un point double, aucune corde d'une courbe tracée sur P ne pouvant être verticale. Ceci exige que la conique θ soit tangente à P, le cône polaire réciproque de θ qui contient la biquadratique étant alors tangent au paraboloïde. Dans ce cas, la déférente est dans le plan π et tangente au cercle directeur correspondant.

On verrait aussi qu'une quartique bicirculaire se décompose en deux cercles si le cercle directeur est bitangent à la déferente qui lui correspond et l'on retrouve alors l'ensemble des cercles tangents à deux cercles fixes.

rentes. Soit B la biquadratique gauche sur P. Prenons deux points *a* et *b* de B en ligne droite avec un des sommets de cône *c* et le point *d* où *ab* coupe le plan polaire θ de *c* par rapport à P (*fig.* 5). Les tangentes en

Fig. 5.



a et *b* à B se coupent en un point *k* de la tangente, au lieu de *d*, en *d*. Le cercle d'axial *k* est donc bitangent à la quartique projection de B sur π, il est de plus orthogonal au cercle d'inversion d'axial *c* et son centre décrit une conique, car le lieu de *k* dans θ n'est autre que l'enveloppe des droites conjuguées de *ab* par rapport au paraboloïde, enveloppe qui est une conique, polaire réciproque du cône *c*. Ce mode de génération de la quartique montre bien qu'elle est bicirculaire, comme on le voit en remarquant que les quatre points de B situés dans le plan de l'infini sont deux à deux sur les génératrices de P dans ce plan, lesquelles passent, d'ailleurs, par les points cycliques du plan π.

Les quatre cercles directeurs sont orthogonaux deux à deux, car leurs quatre axiaux *c* sont dans l'espace les sommets d'un tétraèdre conjugué commun aux cônes et au paraboloïde.

Les quatre déférentes sont homofocales, car si nous prenons les quatre points communs aux cônes dans le plan de l'infini, leurs plans polaires sont isotropes et deux à deux parallèles, deux contenant une des génératrices de P et les deux autres la seconde. Donc les quatre coniques d'intersection des cônes avec le plan de l'infini donnent par polaires réciproques quatre cylindres qui sont les cylindres projetant les déférentes et qui admettent en commun quatre plans tangents isotropes.

XI. — Courbes en général.

Nous venons de considérer une courbe comme lieu de cercles-points. On peut associer de façons très diverses des cercles à une courbe quelconque.

Si l'on considère, par exemple, les cercles passant par l'origine et tangents ou normaux à la courbe, cercles dont l'axial est confondu avec le centre, on obtient des propriétés des podaires ou des antipodaires de la courbe.

En cherchant quels sont les axiaux des cercles tangents à la courbe M en un point donné ou orthogonaux en ce point, on voit que deux faisceaux de courbes conjuguées sur P donnent, par projection, deux faisceaux de courbes orthogonales. C'est un cas particulier de ce fait facile à vérifier, en partant de deux faisceaux de cercles orthogonaux, que deux droites conjuguées par rapport au paraboloïde se projettent sur π suivant deux droites rectangulaires.

Si m est la projection de M *sur* P, *l'arête de rebroussement* R *de la surface développable donnée par les plans tangents à* P *tout le long de m a pour projection sur le plan π la développée de* M.

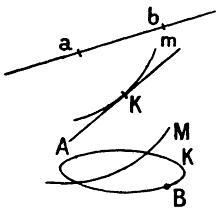
En effet, le cercle de courbure en un point K de M est défini par la condition de passer par trois points infiniment voisins de cette courbe et a son axial au point d'intersection des trois plans tangents en trois points infiniment voisins du point k de la courbe m.

Indiquons encore la propriété suivante :

Si un point décrit dans l'espace une courbe m *quelconque, le cercle dont il est l'axial a son centre qui décrit la courbe* M *projection de* m *et il enveloppe une courbe que l'on a en projetant sur* π *l'intersection avec* P *de la développable polaire réciproque de* m *par rapport à* P.

Soit, en effet, k un point de m; en prenant le point infiniment voisin, on voit que le cercle K d'axial k et le cercle infiniment voisin ont, en commun, deux points A et B, c'est-à-dire sont tangents à deux cercles-points qui ont pour axiaux les deux points a, b où P est coupé par la droite conjuguée de la corde joignant les deux points de m que l'on avait considérés (*fig.* 6).

Fig. 6.



Il suffit de passer à la limite pour obtenir l'énoncé ci-dessus.

Nous n'insisterons pas davantage sur la théorie des courbes en général, car elle nous éloignerait trop de l'étude des cercles.

XII. — Quadriques.

Si l'on considère les cercles dont les axiaux décrivent une quadrique quelconque Q, on voit qu'on peut les définir géométriquement par la condition qu'il y en ait deux, et deux seulement, ayant pour centre un point arbitraire du plan, ou, d'une façon plus précise, que par deux points arbitraires du plan il en passe deux, et deux seulement.

La vérification des diverses propriétés suivantes d'un tel ensemble, que l'on peut appeler *ensemble du second ordre,* se ferait immédiatement d'après ce qui précède.

Les cercles de l'ensemble coupant sous l'angle V *un cercle donné ont leurs centres sur une quadrique. Si cet angle est droit, on a une conique et leur enveloppe est alors une quadrique bicirculaire.*

Les cercles passant par un point fixe ont leurs centres sur une conique. Les cercles de rayon donné ont leurs centres sur une quadrique.

Les faisceaux de cercles de l'ensemble qui correspondent aux génératrices de la quadrique ont leur ligne des centres qui enveloppe une conique, il en est d'ailleurs de même de leur axe radical commun.

La transformation par inversion par rapport à un cercle quelconque fait correspondre à un ensemble du second ordre un autre ensemble de même ordre. Il y a d'ailleurs quatre cercles d'inversion par rapport auxquels l'ensemble est anallagmatique, c'est-à-dire se transforme en lui-même. Ce sont dans l'espace les quatre sommets conjugués communs à la quadrique et au paraboloïde.

On traiterait aisément la question des cercles communs à deux ensembles et l'on pourrait plus généralement étudier des ensembles d'un ordre quelconque, mais cette recherche nous entraînerait trop loin.

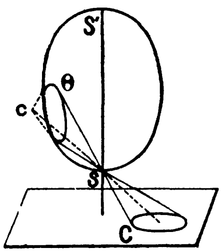
Faisons encore une remarque : on voit que dans le cas où la quadrique est un cône l'ensemble est susceptible d'être défini simplement comme l'ensemble des cercles coupant un cercle fixe donné de telle façon que la corde commune soit tangente à une conique fixe donnée (*voir* la note de la page 345).

XIII. — Autres modes de représentation d'un plan.

On généralise immédiatement ce qui précède en prenant au lieu d'un paraboloïde de révolution une quadrique de révolution quelconque d'axe perpendiculaire au plan donné.

Si S et S′ sont les deux sommets de la quadrique, tout cercle du plan donne deux cônes de sommets S et S′ ayant ce cercle pour base (*fig.* 7). Si nous pre-

Fig. 7.



nons un de ces cônes, il coupe la quadrique suivant une conique θ dont le pôle *c* peut être considéré comme le point représentatif du cercle C. D'ailleurs la droite *c*S passe par le centre de C.

Nous dirons seulement quelques mots du cas particulier où la quadrique considérée est une sphère. La conique θ est ici un cercle qui a pour projection stéréographique le cercle C. Les propriétés de cette projection ont été données par exemple par Duporcq dans ses *Éléments de Géométrie moderne*

XIV. — Application aux problèmes de Gergonne et de Steiner.

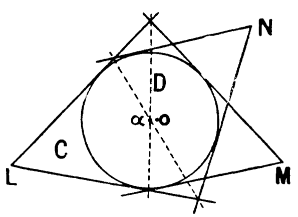
La notion d'axial dans le cas d'une sphère permet d'avoir des solutions peut-être un peu plus simples que les solutions classiques pour ces deux problèmes.

Deux cercles tangents ayant leurs axiaux sur une tangente à la sphère et deux cercles orthogonaux ayant leurs axiaux conjugués, la recherche des points communs à trois cônes à laquelle se ramène le problème de Gergonne va se trouver considérablement simplifiée :

Prenons, comme nous le ferons aussi pour le problème de Steiner, pour plan de figure le plan équatorial de la sphère, le sommet de la projection stéréographique étant par exemple au pôle le plus bas. Précisons même davantage en supposant que le cercle équatorial soit le cercle orthogonal aux trois cercles donnés. Les axiaux des cercles donnés sont alors leurs centres mêmes dans le plan de figure.

Ceci posé, soient L, M, N les centres des trois cercles donnés (*fig.* 8). Le cône de sommet L par exemple,

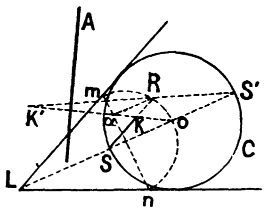
Fig. 8.



circonscrit à la sphère, a pour contour apparent sur le plan de figure les tangentes L au cercle C. Les intersections deux à deux de ces cônes sont des coniques dans des plans verticaux dont les traces telles que D sur le plan de figure sont faciles à obtenir. Les huit points communs aux trois cônes sont deux à deux symétriques par rapport au plan de figure et ont quatre projections sur ce plan que l'on a en faisant couper les droites telles que D.

Soit α un de ces points que nous considérerons par exemple comme étant la projection de deux axiaux pris sur le cône L. Il reste à avoir les deux cercles correspondants; tous les cercles dont les axiaux sont sur la verticale de α ayant pour axe radical avec C la polaire A de α il suffira d'avoir les centres K et K' des deux cercles d'axiaux k et k' sur la verticale de α (*fig.* 9). On a la

Fig. 9.



cote de k en menant mn perpendiculaire à OL par α et rabattant ce point k en R sur le cercle de diamètre mn. Le centre K cherché partageant Oα dans le rapport de la cote αR au rayon de la sphère, il suffira de mener RS ou RS' pour avoir en K et K' les deux centres cherchés.

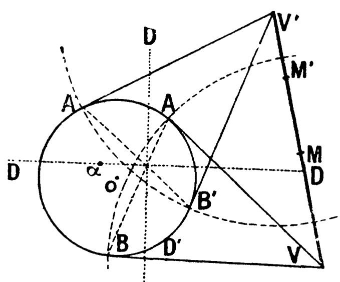
On peut remarquer, comme d'ailleurs ci-dessous, dans le problème de Steiner ou dans tout autre problème analogue, que l'existence de la symétrie qu'il y a par rapport au plan de figure donne immédiatement une propriété des cercles cherchés : ils ont deux à deux même axe radical avec le cercle C.

Les cercles coupant un cercle donné V sous l'angle V ayant leurs centres sur une quadrique circonscrite à la sphère, on va se trouver ramené pour le problème de Steiner à chercher les points communs à trois quadriques.

Prenons toujours pour cercle équatorial le cercle C orthogonal aux trois cercles donnés, ayant pour axiaux leurs centres V, V′, V″.

La quadrique relative au cercle V a pour section sur le plan donné une conique qu'il est inutile de tracer et qui est bitangente à C en A et B. Les plans des coniques d'intersection ont pour traces des droites telles que D et D′ formant faisceau harmonique avec AB et A′B′ et que nous allons déterminer (*fig.* 10). Coupons les deux

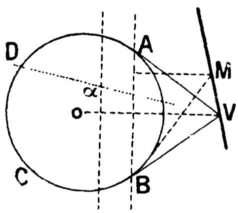
Fig. 10.



quadriques qui nous donnent ces droites par une droite que nous prendrons en VV′. Si l'on connaissait les points MN et M′N′ où cette droite coupe les deux coniques de contour apparent, d'après le théorème de Desargues, D et D′ couperaient la droite VV′ en deux points formant division harmonique avec MN et M′N′. Or, M et N se déterminent aisément en les considérant comme les axiaux ou les centres de deux cercles coupant le cercle V sous l'angle V, de centres sur VV′ et orthogonaux à C. Les deux cercles M et N passant alors par deux points fixes qui sont les points communs aux cercles V et V′, et coupant V sous un angle connu, s'obtiennent rapidement.

On en déduirait, comme dans le problème de Gergonne, la construction d'un point α et l'on achèvera la solution comme ci-dessus, si l'on peut avoir les points m, n où la perpendiculaire en α à OV coupe la conique de contour apparent de la quadrique relative à V (*fig.* 11). Remarquons que cette conique étant bitan-

Fig. 11.



gente au cercle C en A et B tout point M de cette conique donne un rapport constant pour sa distance à AB et pour la longueur de sa tangente à C; la distance de m à AB étant connue et le rapport constant dont on vient de parler l'étant également puisqu'on a déjà en M et N deux points particuliers de cette conique, on aura très aisément m et n, et l'on achèvera sans peine la solution comme pour le problème de Gergonne.

On peut toutes les fois que α est extérieur au cercle C abréger les dernières constructions en remarquant que les cercles cherchés passant par deux points fixes réels et devant couper sous l'angle V un cercle donné se déterminent très aisément en transformant la figure par inversion par rapport à un des deux points réels connus, qui sont, comme on l'a vu, les points où la polaire de α coupe C.

Cette remarque s'applique évidemment de même au problème de Gergonne.

XV. — Extensions diverses.

L'étude des cercles du plan correspond, comme on sait, en transformant par polaires réciproques par rapport à un cercle quelconque, à l'étude des coniques ayant un foyer commun qui est le centre du cercle par rapport auquel on fait la transformation.

Mais il existe d'autres extensions immédiates. C'est ainsi qu'on étudierait de façon analogue les sphères en les représentant par des points de l'espace à quatre dimensions, ou plus simplement qu'on étudierait les segments portés par une droite en leur associant des points d'un plan fixe passant par la droite au moyen d'une conique fixe de ce plan, ayant un axe perpendiculaire à la droite portant les segments considérés. Cette étude est d'ailleurs assez intéressante, car elle permet d'utiliser un très grand nombre de propriétés des courbes planes.