NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 331-336

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__331_1>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1970.

(1903, p 192.)

Le cylindre dont la section droite est la courbe représentée par l'équation intrinsèque $\rho = a - \frac{s^2}{b}$ *(a et b étant des constantes positives) a la propriété* CARACTÉRISTIQUE *qu'on peut tracer, sur la surface, des géodésiques à courbure constante.*

Ces courbes ont pour rayon de courbure géodésique $\sqrt{ab}$, *pour rayon de courbure absolue* $a\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

(G. Pirondini.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

Soient

s_1, ρ_1 et ρ_g l'arc, le rayon de courbure absolue et de courbure géodésique d'une ligne L, placée sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à l'axe des z;
θ, l'inclinaison de L, sur les génératrices;
s et ρ, l'arc et le rayon de courbure de la section droite L du cylindre.

On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\sin^2\theta}\sqrt{\frac{1}{\rho_1^2} - \left(\frac{d\theta}{ds_1}\right)^2}, \qquad \frac{1}{\rho_g} = \frac{d\theta}{ds_1} = \sin\theta\,\frac{d\theta}{ds}.$$

Si donc

$$\rho_g = \alpha, \qquad \rho_1 = \beta,$$

on obtient

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha\beta}\,\frac{1}{\sin^2\theta}, \qquad \sin\theta\, d\theta = \frac{ds}{\alpha}.$$

Et comme on déduit d'ici

$$\cos\theta = -\frac{s}{a},$$

on a

$$(1) \qquad \rho = \frac{\beta}{\alpha\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}(\alpha^2 - s^2).$$

Si l'on pose

$$(2) \qquad \rho = a - \frac{s^2}{b},$$

la comparaison des équations (1), (2) donne

$$\alpha = \sqrt{ab}, \qquad \beta = a\sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

ce qui démontre le théorème énoncé.

2007.

(1905, p. 96.)

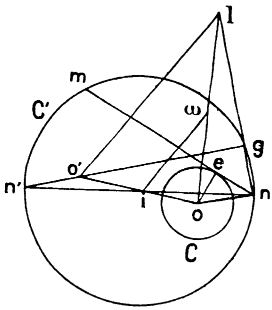
On donne dans un plan deux cercles C *et* C'; *on mène à* C *une tangente variable qui coupe en m et n le cercle* C'; *soit ω le centre du cercle qui passe par les points m et n et par le centre o du cercle* C : *quel est le lieu du point ω?*

(R. B.)

SOLUTION

Par M. *Canon*.

Prenons les points o' et n' symétriques de o et n par rapport au centre i du cercle C'. Menons la corde $n'o'g$, elle



est perpendiculaire à ng, comme on lui est parallèle l'angle ong est droit. La droite ng passe alors par le point l diamétralement opposé à o sur le cercle de centre ω. Le centre ω étant sur la perpendiculaire abaissée de i sur mn, le point l est aussi sur la perpendiculaire abaissée de o' sur mn.

Les triangles $o'gl$, neo sont semblables, ils donnent

$$\frac{o'l}{on} = \frac{o'g}{oe},$$

d'où

$$o'l = \frac{o'g \times on}{oe} = \frac{o'g \times o'n'}{oe} = \text{const.}$$

Le segment $o'l$ étant double du segment $i\omega$, on voit donc que $i\omega$ est de grandeur constante et que *le lieu de* ω *est un cercle de centre* i.

Appelons R le rayon de C′, r le rayon de C, et d la distance io.

D'après ce qui vient d'être trouvé

$$o'l = \frac{R^2 - d^2}{r}$$

et alors

$$i\omega = \frac{R^2 - d^2}{2r}.$$

Remarques. — Supposons que les tangentes à C, issues de m et n, se coupent sur C′, alors elles déterminent avec mn un triangle inscrit à C′ et circonscrit à C. On sait qu'alors

$$d^2 = R^2 - 2Rr,$$

par suite

$$i\omega = R,$$

on retrouve ainsi un résultat connu.

Si l'on transforme par inversion l'énoncé de la question proposée, en prenant le point o pour pôle, on obtient cette propriété :

Un cercle D *de grandeur invariable tourne autour d'un de ses points* o, *le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical de* D *et d'un cercle fixe est un cercle.*

La démonstration directe est très simple, elle s'applique à ce théorème plus général :

Un cercle D *de grandeur invariable tourne autour d'un point arbitraire* o, *le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée de ce point sur l'axe radical de* D *et d'un cercle fixe est un cercle.*

Transformé par inversion, en mettant le pôle au point o, ce théorème donne le suivant :

Soient C′, D *deux cercles qui se coupent en* m, n, *et* ω *le centre du cercle qui passe par* m, n *et un point arbi-*

traire o : ce point ω décrit un cercle lorsque D *tourne autour de o, sans varier de grandeur.*

Autres solutions par MM. ABRAMESCU, BARISIEN, V. MAËS, PARROD, RETALI et TROIN.

2008.

(1895, p. 96.)

On considère un triangle fixe ABC, *une direction* (Δ) *et un point* O. *On tire* AO, BO, CO. *On mène par* A *la droite* (α) *symétrique de* AO *par rapport à la direction* (Δ). *On mène par* B *et* C *les droites* (β) *et* (γ) *analogues à* (α).

1° (Δ) *étant donnée, le lieu du point* O *tel que les droites* (α), (β), (γ) *correspondantes concourent en* O′ *est l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle et dont* (Δ) *est une direction asymptotique;*

2° O *étant l'orthocentre du triangle,* O′ *est sur le cercle circonscrit;*

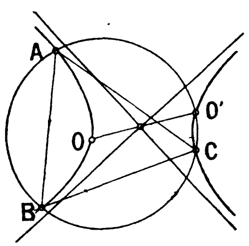
3° (Δ) *étant donnée, trouver l'enveloppe de* OO′.

(L. TROIN.)

SOLUTION

Par M. V. RETALI.

Étant donnés dans un plan un triangle fixe ABC, deux



points fixes Δ, Δ′ et un sixième point O, si les droites α, β, γ sont respectivement conjuguées harmoniques de AO, BO, CO par rapport aux couples du rayon AΔ, AΔ′; BΔ, BΔ′; CΔ, CΔ′ et concourent en même point O′, les trois faisceaux

$A(\Delta\Delta'OO')$, $B(\Delta\Delta'OO')$, $C(\Delta\Delta'OO')$ sont harmoniques et par suite les deux points O, O′ sont conjugués harmoniques par rapport à $\Delta\Delta'$ sur la conique $(ABC\Delta\Delta')$. Si Δ et Δ' sont à l'infini, orthogonales en direction, la conique est une hyperbole équilatère; les points O, O′ sont les extrémités d'un diamètre variable et par suite l'enveloppe de OO′ est le centre.

Si le point O de l'hyperbole équilatère est l'orthocentre du triangle inscrit ABC, le point diamétralement opposé est sur le cercle (ABC); théorème connu qui découle d'ailleurs de l'égalité des angles BAC, BO′C.

Autres solutions de MM. Letierce, Parrod et Abramescu.

2009.

(1905, p. 96.)

On donne un quadrilatère ABCD *inscrit dans une conique, et un point arbitraire* O. *Sur la tangente en* A *à la conique, on prend le point* E *où cette droite est rencontrée par le côté* CB; *on mène la droite* OE *qui coupe* AB *en* M. *Au moyen du côté* CD *on obtient de même le point* N *sur* AD. *Quelle est l'enveloppe de la droite* MN, *lorsque* C *décrit la conique?* (*Canon.*)

SOLUTION

Par M. Parrod.

Les points E et F sont homographiques, par suite M et N; quand le point C est en A, M et N sont confondus en A; donc MN passe par un point fixe.

Remarques. — La droite passe par un point fixe quelle que soit la droite donnée passant par A et que ce point soit situé ou non sur la conique, l'enveloppe est une conique tangente aux droites AD et AB.

Autres solutions par MM. Abramescu, V. Maës, Retàli.