NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Agrégation des sciences mathématiques (concours de 1905)

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 328-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__328_0>

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1905).

Sujets des compositions.

Mathématiques élémentaires.

On donne un cercle C de centre O et de rayon R, un point fixe K à l'intérieur de ce cercle. Un rayon lumineux FK, émanant d'un point F de la circonférence du cercle C, se réfléchit en K sur le diamètre OK et va rencontrer la circonférence de C en un point E. Soit M le milieu de la corde EF et soit AB la corde de C perpendiculaire au diamètre OK au point K.

1° Trouver le lieu des centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle MAB quand F décrit la circonférence du cercle C.

2° Étudier, dans les mêmes conditions, comment varie le cercle passant par les centres des trois cercles exinscrits au triangle MAB.

3° On prend un second point K' fixe, intérieur à C et situé sur le diamètre OK. Un rayon lumineux F'K', parallèle à FK, se réfléchit en K' sur ce diamètre et rencontre en E' la circonférence du cercle C. Trouver le lieu du point de rencontre de EF et de E'F' lorsque F et F' se déplacent sur la circonférence du cercle C. Étudier ce lieu en supposant que K et K' se déplacent sur un diamètre fixe et de telle sorte que le milieu de KK' reste fixe.

4° Soit M' le milieu de E'F'. La droite MM' rencontre le lieu de M en un nouveau point H et celui de M' en un nouveau point H'. Étudier le cercle circonscrit au triangle HOH' et la perpendiculaire au milieu de HH'.

5° Soit L le point qui partage HH' dans un rapport donné λ. Démontrer que le lieu du point L est en général une ellipse. Examiner comment varient les cercles principaux de cette ellipse quand le rapport λ varie.

Mathématiques spéciales.

1° On donne les deux droites D, D′ définies respectivement par les équations

$$(\mathrm{D}) \qquad y = o, \qquad z = h,$$

$$(\mathrm{D}') \qquad x = o, \qquad z = -h,$$

les axes de coordonnées ox, oy, oz étant supposés rectangulaires. Trouver l'équation ponctuelle de la surface S lieu du sommet d'un paraboloïde variable qui passe par ces deux droites. Trouver l'équation tangentielle de la même surface S.

2° Calculer les coordonnées d'un point quelconque M de la surface S en fonction de l'abscisse α et de l'ordonnée β des deux points N, N′ où une droite, menée par M, rencontre respectivement D et D′. Soit P le point de coordonnées α, β dans le plan xoy. Lieu du point M quand P décrit une droite quelconque du plan xoy. Étude de l'intersection de la surface S avec une quadrique quelconque qui passe par D et D′. Lieu correspondant du point P. Cas où cette intersection se décompose.

3° Démontrer que la surface S est sa propre polaire réciproque par rapport à une infinité de quadriques Q, dont on cherchera l'équation générale ponctuelle. On envisagera plus particulièrement parmi elles les paraboloïdes Q_1. Trouver l'enveloppe des quadriques Q.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

L'équation d'un plan, par rapport à trois axes de coordonnées rectangulaires ox, oy, oz, étant décrite sous la forme

$$ux + vy + wz = h,$$

les équations

$$u = \cos\varphi, \qquad v = \sin\varphi, \qquad w = \cot\theta, \qquad h = f(\theta, \varphi),$$

où θ et φ désignent deux paramètres arbitraires et $f(\theta, \varphi)$ une fonction donnée de ces paramètres, définissent une surface S en coordonnées tangentielles.

1° Démontrer que, si l'on considère sur la surface S les deux systèmes de courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, la condition nécessaire et suffisante pour que ces deux systèmes soient conjugués est que $f(\theta, \varphi)$ soit de la forme

$$f(\theta, \varphi) = \alpha + \beta,$$

α étant une fonction de θ seul et β fonction de φ seul.

Dans toute la suite de l'énoncé, on supposera que $f(\theta, \varphi)$ est de cette forme.

2° Montrer que les courbes $\theta = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$ sont alors les lignes de courbure de la surface S et qu'elles sont en outre des courbes planes. Calculer, en fonction de θ et de φ, les deux rayons de courbure principaux en un point quelconque de la surface S.

3° De ces deux rayons, l'un R_1 est fonction de θ seulement; l'autre R_2 dépend en général à la fois de θ et de φ. Quelle forme doit avoir $f(\theta, \varphi)$ pour que R_2 soit aussi indépendant de φ? Montrer que, dans ce cas, la surface S est de révolution autour d'un axe parallèle à oz.

4° Etablir que, plus particulièrement, on peut déterminer la fonction $f(\theta, \varphi)$ de manière à avoir

$$R_1 = l \tan\theta, \qquad R_2 = -\,l \cot\theta,$$

R_1 et R_2 étant, suivant l'usage, affectés d'un signe et l désignant une longueur donnée, positive ou négative. Effectuer cette détermination.

5° Trouver, dans ce cas particulier, la relation entre θ et φ qui définit une ligne géodésique quelconque de la surface S et calculer la courbure et la torsion de cette ligne en un quelconque de ses points.

Mécanique rationnelle.

Soient $ox_1y_1z_1$ un trièdre trirectangle fixe et $oxyz$ un trièdre trirectangle mobile de même sommet et de même orientation. Un corps solide S, attaché à ce second trièdre, est ainsi mobile autour du point fixe o.

Former les équations de son mouvement, sachant :

1° Que son ellipsoïde d'inertie relatif au point o est de révolution autour de oz.

2° Que le solide S, supposé non pesant, est sollicité par une force F appliquée en un point G de oz tel que $oG = a$, dirigée suivant PG, P désignant un point de oz_1 tel que $oP = b$, et égale à une fonction donnée $f(\mathrm{GP})$ de la distance des deux points G et P.

3° Qu'au début du mouvement, l'angle zoz_1 est droit et que la rotation instantanée du solide S se trouve dans le plan zoz_1, avec des projections sur oz et sur oz_1 égales respectivement à ω et à ω_1.

Application. — Le solide S est une sphère homogène, de centre G, de rayon a et de masse M. On a de plus

$$b = a, \qquad \omega_1 = -\frac{7}{2}\omega, \qquad f(\mathrm{GP}) = \frac{28}{5} \mathrm{M} a^4 \omega^2 \frac{1}{\overline{\mathrm{GP}}^3}.$$

Exprimer les angles d'Euler en fonctions explicites du temps.

Déterminer et étudier successivement les trajectoires de l'extrémité de la rotation instantanée par rapport aux deux trièdres trirectangles $o\mathrm{X}\mathrm{Y}_1 z_1$ et $o\mathrm{X}\mathrm{Y}z$, supposés orientés comme le trièdre $ox_1y_1z_1$, $o\mathrm{X}$ étant perpendiculaire au plan zoz_1.