

HENRI PICCIOLI

**Sur l'équation intrinsèque des lignes qui
appartiennent à certaines surfaces de
révolution et du second degré**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 307-310

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__307_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

[M' m]

SUR L'ÉQUATION INTRINSÈQUE DES LIGNES QUI APPARTIENNENT A CERTAINES SURFACES DE RÉVOLUTION ET DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. HENRI PICCIOLI, à Empoli.

La méthode que j'ai exposée dans un article récent ⁽¹⁾ et qui m'a servi pour trouver l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent au cylindre de révolution peut s'étendre à d'autres cas que je crois bien de faire connaître dans cette Note.

Je commence par écrire les deux groupes de formules

$$(I) \quad \begin{cases} \frac{dA}{ds} = \frac{B}{\rho} - 1, \\ \frac{dB}{ds} = -\frac{A}{\rho} - \frac{C}{T}, \\ \frac{dC}{ds} = \frac{B}{T}, \end{cases}$$

$$(II) \quad \begin{cases} \frac{dm_1}{ds} = \frac{m_2}{\rho} + \sin^2 \theta, \\ \frac{dm_2}{ds} = -\frac{m_1}{\rho} - \frac{m_3}{T} + \cos \theta_1 \cos \theta_2, \\ \frac{dm_3}{ds} = \frac{m_2}{T} - \cos \theta_1 \cos \theta_3 \end{cases}$$

dans le premier desquels A, B, C représentent les distances des plans principaux d'une courbe à double courbure \mathcal{L} à un point fixe R, et dans le deuxième :

$$m_i = M_h \cos \theta_k - M_k \cos \theta_h,$$

⁽¹⁾ *Sur l'équation intrinsèque des lignes du cylindre de révolution* (Nouv. Ann., 1904).

où i, h, k est une combinaison des nombres 1, 2, 3 et M_h représente le moment de la direction principale $h^{\text{ième}}$ par rapport à une droite fixe r avec laquelle elle forme l'angle θ_h .

Je rappelle enfin que les expressions

$$A^2 + B^2 + C^2 \quad \text{et} \quad M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$$

mesurent le carré de la distance d'un point de la courbe \mathcal{L} au point R et à la droite r respectivement.

Cela posé, soit

$$f(x, y) = 0$$

l'équation d'une courbe \mathcal{C} rapportée à deux axes rectangulaires Ox, Oy et soit P un des points où elle est rencontrée par la ligne \mathcal{L} appartenant à la surface de révolution engendrée par \mathcal{C} lorsqu'on fait tourner son plan autour d'une de ses droites, par exemple autour de l'axe Ox . Posant $l^2 = x^2 + y^2$ (1), l'équation de \mathcal{C} pourra s'écrire sous la forme

$$\lambda(y, l^2) = 0.$$

Nous admettrons que de cette équation on puisse tirer

$$(1) \quad y = \varphi(l^2);$$

alors, comme y , représentant la distance de P à l'axe de rotation, est mesuré par $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$ et l par $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, nous pourrons substituer à l'équation (1) l'autre qui lui équivaut

$$\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = \varphi(A^2 + B^2 + C^2).$$

Voilà la relation qui lie les distances d'un point de \mathcal{L} à R

(1) Dans ce qui va suivre nous avons supposé que R appartient à r .

et r ; d'ici, en élevant au carré et différentiant ensuite par rapport à l'arc s de \mathcal{L} , tenant compte des formules (I) et (II), on trouvera

$$(2) \quad m_1 = -A \frac{d\varphi^2(l^2)}{dl^2}.$$

Les cas auxquels nous nous bornerons dans cette Note s'obtiennent en supposant

$$\frac{d\varphi^2(l^2)}{dl^2} = a \quad (a \text{ const. réelle}).$$

Il en résulte

$$(3) \quad \varphi^2(l^2) = al^2 + b \quad (b \text{ const.}).$$

D'ailleurs, comme

$$m_1 = -aA,$$

les deux premières des formules (II) nous donneront

$$m_2 = -aB + (1-a)\rho + \rho \cos^2\theta,$$

$$m_3 = -aC + T \frac{d\rho}{ds} (1-a - \cos^2\theta_1) - 3T \cos\theta_1 \cos\theta_2$$

et la troisième nous conduira à une relation du type

$$A_{11} \cos^2\theta_1 + A_{22} \cos^2\theta_2 + A_{33} \cos^2\theta_3 + A_{12} \cos\theta_1 \cos\theta_2 \\ + A_{23} \cos\theta_2 \cos\theta_3 + A_{13} \cos\theta_1 \cos\theta_3 + A = 0,$$

où les A sont des fonctions connues de ρ , T et a .

De là, suivant la méthode indiquée dans la Note précitée, nous parviendrons à l'équation intrinsèque $W = 0$.

Les équations (1) et (3) nous donneront

$$(4) \quad ax^2 + (a-1)y^2 + b = 0$$

pour équation de la section méridienne. Cette courbe étant une conique, on en déduit que, pour $a > 1$, l'équation $W = 0$ sera l'équation intrinsèque des lignes qui appartiennent à l'*ellipsoïde allongé* : b doit

être négatif pour la réalité de la surface. Pour $0 < a < 1$, $W = 0$ sera l'équation intrinsèque d'un *hyperboloïde à une nappe* ($b > 0$) ou à *deux nappes* ($b < 0$) ou bien d'une *surface conique de révolution* ($b = 0$). Enfin, on obtiendra l'équation intrinsèque de l'*ellipsoïde aplati* pour $a < 0$ et $b > 0$ (1).

Lorsque a est fonction de l^2 , dans $W = 0$ figurent les quantités A, B, C; l'équation cherchée résulterait, en éliminant A, B, C, entre cette équation-ci et le système (1).