

E. MATHY

Méthode particulière d'intégration de

$\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} dx$ quand

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont réelles et que $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

Application à la géométrie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 299-306

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5_299_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[F8a]

MÉTHODE PARTICULIÈRE D'INTÉGRATION DE

$$\int_{\gamma}^{\beta} \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} dx$$

QUAND $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ SONT RÉELLES ET QUE $\alpha > \beta > \gamma > \delta$.

APPLICATION A LA GÉOMÉTRIE;

PAR M. E. MATHY.

LEMME. — Développement des fractions $\frac{A}{(pu - pv)^n}$
en fonctions entières de $\zeta, p, p^{(n)}$.

Dans la théorie des fonctions elliptiques on démontre que les fractions de la forme $\frac{\Lambda}{(pu - p\nu)^n}$ peuvent s'exprimer en fonctions entières de ζ , p et $p^{(n)}$. Les développements ne sont pas formés; comme ils seront utilisés dans la question à résoudre, je me propose de les rechercher jusqu'à l'exposant 3.

Afin d'abrèger les annotations, je pose

$$(1) \quad \varphi(u, \nu) = \zeta(u + \nu) - \zeta(u - \nu) - 2\zeta(\nu).$$

La formule d'addition donne alors

$$(2) \quad \frac{1}{pu - p\nu} = -\frac{1}{p'\nu} \varphi(u, \nu).$$

En dérivant (2) par rapport à ν , on a

$$\frac{p'\nu}{(pu - p\nu)^2} = \frac{p''\nu}{p'^2\nu} \varphi(u, \nu) - \frac{1}{p'\nu} \varphi'_\nu(u, \nu).$$

On en conclut

$$(3) \quad \frac{1}{(pu - p\nu)^2} = \frac{p''\nu}{p'^3\nu} \varphi(u, \nu) - \frac{1}{p'^2\nu} \varphi'_\nu(u, \nu).$$

On procède de même pour l'exposant 3 et l'on obtient

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{(pu - p\nu)^3} &= \left(\frac{p'''\nu}{2p'^4\nu} - \frac{3}{2} \frac{p''\nu}{p'^5\nu} \right) \varphi(u, \nu) \\ &+ \frac{3}{2} \frac{p''\nu}{p'^4\nu} \varphi'_\nu(u, \nu) - \frac{1}{2p'^3\nu} \varphi''_\nu(u, \nu). \end{aligned} \right.$$

Les valeurs de $\varphi'_\nu(u, \nu)$ et $\varphi''_\nu(u, \nu)$ se déduisent de (1)

$$(5) \quad \varphi'_\nu = -p(u + \nu) - p(u - \nu) + 2p\nu,$$

$$(6) \quad \varphi''_\nu = -p'(u + \nu) + p'(u - \nu) + 2p'\nu.$$

Cas particuliers. — Si $p\nu = e_\alpha$,

$$p'\nu = 0$$

et les formules sont en défaut; mais alors, on se sert de

$$\frac{(e_\alpha - e_\beta)(e_\alpha - e_\gamma)}{p u - e_\alpha} = p(u + \omega_\alpha) - e_\alpha.$$

Il suffit de les élever au carré, puis au cube, et de remplacer

$$p^2 = \frac{1}{6} p'' + \frac{1}{12} g_2,$$

$$p^3 = \frac{1}{120} p^{(iv)} + \frac{3}{20} g_2 p - \frac{1}{10} g_3$$

pour avoir les expressions intégrables.

MÉTHODE D'INTÉGRATION. — Soit à calculer

$$\int \sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} dx$$

avec

$$\alpha > \beta > \gamma > \delta.$$

En posant $\alpha - x = \frac{1}{y}$, on en déduit

$$(7) \quad \begin{cases} \beta - x = \frac{1}{y} - (\alpha - \beta), & dx = \frac{dy}{y^2}, \\ \gamma - x = \frac{1}{y} - (\alpha - \gamma), \\ \delta - x = \frac{1}{y} - (\alpha - \delta). \end{cases}$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)(\gamma-x)(\delta-x)} dx \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{y} - (\alpha - \beta)\right) \left(\frac{1}{y} - (\alpha - \gamma)\right) \left(\frac{1}{y} - (\alpha - \delta)\right) \frac{1}{y} \frac{dy}{y^2}} \\ &= i \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} \sqrt{\left(y - \frac{1}{\alpha - \beta}\right) \left(y - \frac{1}{\alpha - \gamma}\right) \left(y - \frac{1}{\alpha - \delta}\right) \frac{dy}{y^2}}. \end{aligned}$$

Le polynome sous le radical est du troisième degré;

pour faire disparaître le terme du second degré, on fait

$$(8) \quad y = z + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} + \frac{1}{\alpha - \gamma} + \frac{1}{\alpha - \delta} \right) = z + \frac{1}{3} A.$$

En outre, si

$$(9) \quad \begin{cases} e_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} - \frac{1}{3} A, \\ e_2 = \frac{1}{\alpha - \gamma} - \frac{1}{3} A, \\ e_3 = \frac{1}{\alpha - \delta} - \frac{1}{3} A, \end{cases} .$$

l'expression se change en

$$i \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)} \frac{dz}{\left(z + \frac{1}{3} A\right)^4}.$$

Enfin, soient

$$(10) \quad z = pu \quad \text{et} \quad -\frac{1}{3} A = pv;$$

de ce que

$$p'u = -2 \sqrt{(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3)},$$

on pourra écrire

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)} \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} \frac{p'^2 u du}{(pu - pv)^4}. \end{aligned}$$

Conséquemment

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int \sqrt{(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)} dx \\ &= -\frac{i}{2} \sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)} \int \frac{p'^2 u du}{(pu - pv)^4}. \end{aligned} \right.$$

D'abord, on peut remarquer que de

$$\frac{d}{du} \frac{p'u}{(pu - pv)^3} = \frac{p'u}{(pu - pv)^3} - 3 \frac{p'^2 u}{(pu - pv)^4},$$

on en déduit

$$(12) \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{p'^2 u du}{(pu - pv)^3} \\ & = -\frac{1}{3} \left(\frac{p' u}{(pu - pv)^3} \right)_{\text{lim}} + \frac{1}{3} \int \frac{p'' u du}{(pu - pv)^3}. \end{aligned} \right.$$

En outre, de ce que

$$\begin{aligned} p'' u &= 6p^2 u - \frac{1}{2} g_2 \\ &= 6(pu - pv)^2 + 12pv(pu - pv) + 6p^2 v - \frac{1}{2} g_2, \end{aligned}$$

il résulte que

$$\frac{1}{3} \frac{p'' u}{(pu - pv)^3} = \frac{2}{pu - pv} + \frac{4pv}{(pu - pv)^2} + \frac{1}{3} \frac{p'' v}{(pu - pv)^3}.$$

On peut donc intégrer $\frac{1}{3} \int \frac{p'' u du}{(pu - pv)^3}$ par les formules (2), (3) et (4)

$$(13) \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{3} \int \frac{p'' u du}{(pu - pv)^3} \\ & = -\frac{2}{p'v} \int \varphi(u, v) du \\ & \quad + \frac{4pv p'' v}{p'^3 v} \int \varphi(u, v) du - \frac{4pv}{p'^2 v} \int \varphi'_v(u, v) du \\ & \quad + \left(\frac{p'' v p''' v}{6p'^4 v} - \frac{1}{2} \frac{p''' v}{p'^3 v} \right) \int \varphi(u, v) du \\ & \quad + \frac{1}{2} \frac{p''^2 v}{p'^4 v} \int \varphi'_v(u, v) du - \frac{1}{6} \frac{p'' v}{p'^3 v} \int \varphi''_v(u, v) du. \end{aligned} \right.$$

Or, de (1), (5) et (6), on tire

$$(14) \left\{ \begin{aligned} \int \varphi(u, v) du &= \log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} - 2u \zeta v, \\ \int \varphi'_v(u, v) du &= \zeta(u+v) + \zeta(u-v) + 2u p v \\ &= \zeta u + \frac{p' u}{pu - pv} + 2u p v, \\ \int \varphi''_v(u, v) du &= -p(u+v) + p(u-v) + 2u p' v \\ &= \frac{p' u p' v}{(pu - pv)^2} + 2u p' v. \end{aligned} \right.$$

En se servant de (13) et (14), on a, en groupant les termes,

$$(15) \left\{ \begin{aligned} & \int \frac{p'^2 u du}{(pu - p\nu)^4} \\ &= -\frac{1}{3} \frac{p'u}{(pu - p\nu)^3} - \frac{1}{6} \frac{p''\nu}{p'^3\nu} \left(\frac{p'u p'\nu}{(pu - p\nu)^2} + 2u p'\nu \right) \\ & \quad - \left(\frac{4p\nu}{p'^2\nu} - \frac{1}{2} \frac{p''^2\nu}{p'^4\nu} \right) \left(\frac{p'u}{pu - p\nu} + 2\zeta u + 2u p\nu \right) \\ & \quad - \left(\frac{2}{p'\nu} - \frac{4p\nu p''\nu}{p'^3\nu} - \frac{1}{6} \frac{p''\nu p'''\nu}{p'^4\nu} + \frac{p'^3\nu}{2p'^5\nu} \right) \left(\log \frac{\sigma(u+\nu)}{\sigma(u-\nu)} - 2u\zeta\nu \right). \end{aligned} \right.$$

La question sera complètement résolue si l'on exprime $p\nu$, $p'\nu$, $p''\nu$ et $p'''\nu$ en fonction de α , β , γ , δ .

Or

$$(16) \quad p\nu = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{\alpha - \beta} + \frac{1}{\alpha - \gamma} + \frac{1}{\alpha - \delta} \right),$$

on obtient ainsi

$$(17) \quad p'\nu = \frac{-2i}{\sqrt{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)}},$$

$$(18) \quad p''\nu = 6p^2\nu - \frac{1}{2}g_2 = 2 \frac{3\alpha - (\beta + \gamma + \delta)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)}.$$

En outre, on sait que

$$(19) \quad p'''\nu = 12p p'.$$

Les limites d'intégration sont fournies par

$$\alpha - x = \frac{1}{pu - p\nu};$$

aux valeurs extrêmes de x correspondent celles de u .

D'un autre côté, de (16) et (17) on conclut que ν est purement imaginaire et compris entre 0 et ω' .

Valeur de l'intégrale quand les limites de l'intégration sont $x = \gamma$ et $x = \beta$. — Dans ce cas : $x = \gamma$

donne

$$\alpha - \gamma = \frac{1}{p u - p v}, \quad p u = e_2, \quad u = \omega'',$$

$x = \beta$ donne

$$\alpha - \beta = \frac{1}{p u - p v}, \quad p u = e_1, \quad u = \omega$$

Mais alors

$$(p' u)_{\omega}^{\omega} = 0, \quad (\zeta u)_{\omega}^{\omega} = -\eta', \quad \left(\log \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u-v)} \right)_{\omega}^{\omega} = -2\eta'v.$$

Avec ces conditions, la formule (15) devient

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_{\omega''}^{\omega} \frac{p^2 u du}{(p u - p v)^2} \\ &= \frac{1}{3} \frac{p'' v}{p^2 v} \omega' + \left(\frac{8 p v}{p^2 v} - \frac{p'^2 v}{p^4 v} \right) (\eta' + \omega' p v) \\ & \quad - \left(\frac{4}{p v} - \frac{8 p v p'' v}{p^3 v} - \frac{1}{3} \frac{p'' v p v}{p^4 v} + \frac{p'^3 v}{p^5 v} \right) (\eta' v - \omega' \zeta v). \end{aligned} \right.$$

Les notations ω' et η' peuvent être remplacées par K' et E' qui ont été calculées par Legendre; les formules sont

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega &= \frac{K'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, & \eta' &= E' \sqrt{e_1 - e_3} + \frac{e_3 K'}{\sqrt{e_1 - e_3}}, \\ & & k'^2 &= \frac{e_1 - e_2}{e_1 - e_3} = \sin^2 \left(\frac{u}{2} - \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \right.$$

Il est donc possible d'obtenir la valeur précise de

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_1^{\beta} \frac{\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)} dx}{\frac{1}{2} \sqrt{(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)}} \\ &= + \frac{1}{3} \frac{p v}{p^2 v} \frac{\omega}{i} \\ & \quad - \left(\frac{8 p v}{p^2 v} - \frac{p'^2 v}{p^4 v} \right) \left(i \eta' - \frac{\omega'}{i} p v \right) \\ & \quad - \left(\frac{4}{p' v} - \frac{8 p v p'' v}{p^3 v} - \frac{1}{3} \frac{p'' v p v}{p^4 v} + \frac{p'^3 v}{p^5 v} \right) \left(i \eta' v + \frac{\omega'}{i} \zeta v \right). \end{aligned} \right.$$

APPLICATION GÉOMÉTRIQUE. — *Volume commun à deux cylindres droits à bases circulaires dont l'un pénètre l'autre, quand les deux axes sont perpendiculaires entre eux.*

Soit a la plus courte distance des deux axes des cylindres. On choisit comme axe des Z l'axe du cylindre pénétré, et comme axe des X la plus courte distance; cette plus courte distance rencontre l'axe des Z en O ; par O on mène une perpendiculaire au plan ZOX ; c'est l'axe des Y qui devient parallèle à l'axe du second cylindre.

Cela posé, il est facile de voir que les équations des deux cylindres sont

$$(23) \quad y^2 + x^2 = R^2,$$

$$(24) \quad z^2 + (x - a)^2 = r^2.$$

Une tranche commune aux deux cylindres, parallèle à ZOY et d'épaisseur dx , a pour volume

$$yz \, dz;$$

le volume total commun sera

$$V = 4 \int zy \, dx.$$

ou

$$(25) \quad V = 4 \int \sqrt{(R^2 - x^2)[r^2 - (a - x)^2]} \, dx.$$

Les quatre racines du polynome sont réelles : dans le cas de pénétration

$$\delta = -R, \quad \gamma = (a - r), \quad \beta = a + r, \quad \alpha = R;$$

dans le cas d'arrachement

$$\delta = -R, \quad \gamma = (a - r), \quad \beta = R, \quad \alpha = a + r.$$

On reconnaît que les limites d'intégration sont γ et β et qu'il faut appliquer la formule (22).