

LUCIEN LÉVY

Remarques sur la détermination des moments fléchissants produits par le passage d'un convoi sur une poutre à deux appuis simples

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5 (1905), p. 289-299

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5_289_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[R4d α]

REMARQUES SUR LA DÉTERMINATION DES MOMENTS FLÉCHISSANTS PRODUITS PAR LE PASSAGE D'UN CONVOI SUR UNE POUTRE A DEUX APPUIS SIMPLES;

PAR M. LUCIEN LÉVY,

Professeur remplaçant de Géométrie descriptive
au Conservatoire des Arts et Métiers.

Diverses méthodes ont été proposées pour la détermination des moments fléchissants produits dans une poutre par un convoi mobile. M. Maurice Lévy, dans son classique *Traité de Statique graphique* (t. I, p. 352), a fait connaître un intéressant théorème, dû à M. Ventre, théorème établi par des considérations analytiques, et en a déduit une méthode très simple que nous appellerons, pour abrégé, *la méthode Ventre*. M. Rouché, dans ses excellents *Éléments de Statique graphique*, a donné la préférence à une méthode inventée par M. Leman (*Bulletin de l'Académie royale de Belgique*, 3^e série, t. IX); outre que cette méthode purement géométrique paraît mieux à sa place que celle de M. Ventre dans un cours de Géométrie descriptive et est certainement plus à la portée des auditeurs du Conservatoire des Arts et Métiers, on verra qu'elle donne des renseignements plus complets que la méthode Ventre. Cette dernière s'en déduit d'ailleurs immédiatement, sans aucun calcul, comme nous le montrerons.

Rappelons rapidement en quoi consiste la méthode Leman. Soit AB la poutre reposant librement par ses

extrémités sur deux appuis A et B. Soient h_1, h_2, h_3 les points de la poutre situés sous les essieux, dans une position quelconque du convoi mobile (*fig. 1 et 2*) :

Fig. 1.

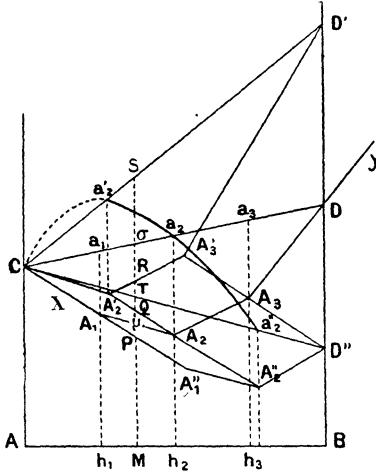
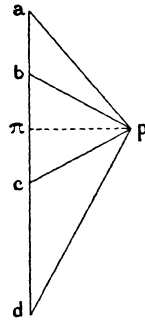


Fig. 2.



nous supposons le train entièrement engagé sur la poutre, et nous avons réduit à trois le nombre des essieux pour simplifier la figure.

Soit, enfin, p le pôle du polygone des forces réduit ici à la droite $abcd$; $d = p\pi$ est la distance du pôle à cette droite; XCA, A_2A_3Dy est le polygone funiculaire correspondant aux trois charges données ab, bc, cd ; CD est la ligne de clôture de ce polygone. On sait que le moment de flexion de la poutre au point M (somme des moments par rapport au point M des forces situées à gauche de M , y compris la réaction de l'appui A) a pour expression

$$\mu\sigma \times d.$$

Ce moment varie à chaque instant avec le dia-

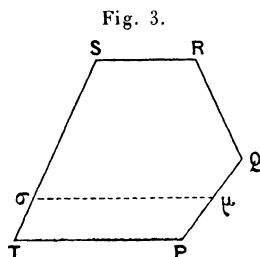
gramme $CA_1A_2A_3D$. Le problème consiste à trouver le maximum de ce moment, et aussi le point de la poutre pour lequel ce maximum est le plus grand possible.

Le polygone des forces et son pôle ne changent pas pendant le mouvement du train; nous garderons aussi C comme origine du polygone funiculaire. Il en résulte que le sommet A_1 décrira une droite XC parallèle à ap . De plus, l'écartement des essieux restant constant, le segment A_1A_2 garde la même grandeur et la même direction; le point A_2 décrit donc une parallèle à XC; de même A_3 décrit une droite parallèle à XC. On en déduit facilement, le train marchant de A vers B, le diagramme d'entrée $CA'_2A'_3D'$ correspondant à la position du train pour laquelle l'essieu de queue est au-dessus de l'appui A, et le diagramme de sortie $CA''_1A''_2D''$ correspondant à la position du train pour laquelle l'essieu de tête arrive en B.

La solution très ingénieuse de M. Leman consiste à considérer tous ces diagrammes successifs comme les projections sur le plan de la figure (que nous supposons horizontale) de diagrammes respectivement égaux à leurs projections et situés dans des plans horizontaux : la position de ces diagrammes est entièrement déterminée dans l'espace si l'on assujettit les sommets projetés en D'' , ..., D, ..., D' à être tous sur une même droite, d'ailleurs arbitraire. Nous désignerons, dans ce qui suit, les points de l'espace par les mêmes lettres que leurs projections horizontales, ce qui ne pourra pas produire de confusion; D'' est supposé dans le plan horizontal. Dans cette nouvelle manière de concevoir la figure, la droite mobile de l'espace A_3D décrit un plan $D''A'_3D'$; A_2A_3 décrit le plan $A''_2D''A'_2A'_3$, A_1A_2 le plan $CA''_1A''A'_2$, enfin la droite de clôture CD décrit

un parabolôïde hyperbolique (P) ayant pour plans directeurs le plan horizontal et le plan vertical $D'D''$. Ces plans, le parabolôïde (P) et les plans horizontaux des diagrammes supérieur et inférieur limitent un solide plan gauche (Π).

Le plan vertical, perpendiculaire à la poutre qui a pour trace MP, coupe le parabolôïde (P) suivant une génératrice rectiligne lieu du point σ ; il coupe les autres faces du solide (Π) suivant des lignes droites. On obtient ainsi, dans ce plan vertical, un polygone PQRST; le point μ décrit les côtés PQ, QR (fig. 3). Ce polygone, outre ses sommets dans les



plans le plus haut et le plus bas, a un sommet sur chaque arête, telle que $A'_2 A''_2$, du solide (Π), rencontrée par le plan sécant. On voit immédiatement que le maximum de $\mu\sigma$ correspondra nécessairement à une position de μ coïncidant avec un des sommets du polygone, Q par exemple. A ce moment, le diagramme mobile $CA_1 A_2 A_3 D$ sera placé de manière que son sommet A_2 soit en Q, et un des essieux du convoi sera en M. Ainsi, à moins que le moment maximum au point M ne se produise à l'entrée ou à la sortie du train, pour l'obtenir il suffira de prendre le plus grand des moments obtenus en M, à l'instant du passage d'un essieu en ce point.

Cherchons maintenant le plus grand de ces maximums. Lorsque le train a la position h_1, h_2, h_3 , le moment de flexion en h_2 a pour valeur $A_2 a_2 \times d$. Suivons le deuxième essieu pendant le déplacement du convoi. La droite $A_2 a_2$ considérée comme étant dans l'espace décrit un plan parallèle à l'arête $A'_2 A''_2$ du solide (II) et à l'axe du paraboloidé (P); a_2 décrit l'intersection de (P) avec ce plan, c'est-à-dire une parabole. La projection horizontale de cette parabole est une parabole, dont l'axe est perpendiculaire à AB.

Nous ferons ici une remarque importante. Toutes ces sections du paraboloidé par des plans parallèles entre eux sont des paraboles égales, et leurs projections horizontales sont des paraboles égales entre elles. Elles passent toutes par le point C, projection du point où la génératrice verticale du paraboloidé hyperbolique est coupée par le plan sécant. Pour en construire une, il suffira d'en avoir trois points, savoir c, le point a'_2 fourni par le diagramme d'entrée et le point a''_2 par le diagramme de sortie. Une de ces paraboles étant construite aussi exactement que possible, on en découpera un patron qui servira à construire les autres. Sur la figure 1, nous n'avons représenté qu'une de ces paraboles; l'arc en traits pleins est le seul utile. Les moments sous l'essieu sont les portions de perpendiculaires à la poutre comprises entre l'arc et la droite initiale $A'_2 A''_2$. Le moment maximum sous le second essieu correspondra au point pour lequel la tangente est parallèle à $A'_2 A''_2$. On trouvera ainsi pour chaque essieu un moment maximum, et il faut comparer ces moments maximums entre eux.

A cet effet, M. Leman remplace les diagrammes polygonaux ou paraboliques par des diagrammes ayant tous pour ligne de clôture ou pour droite initiale la

poutre AB. Il suffit, pour cela, de faire glisser chaque ordonnée telle que $A'_2 a'_2$ dans sa direction jusqu'à ce que son extrémité supérieure vienne sur la droite AB. On aura alors au-dessous de AB deux espèces de diagrammes.

Aux deux diagrammes polygonaux d'entrée et de sortie $CA'_2 A'_3 D'$, $CA''_1 A''_2 D''$ correspondront des diagrammes polygonaux $A \alpha'_2 \alpha'_3 B$, $A \alpha''_1 \alpha''_2 B$. Ces deux diagrammes auraient pu être obtenus directement, comme d'ailleurs tous les diagrammes polygonaux analogues déduits des diagrammes quelconques $CA_1 A_2 A_3 D$; en effet, $A \alpha'_2 \alpha'_3 B$, par exemple, n'est pas autre chose qu'un polygone funiculaire pour la position du train dans laquelle l'essieu de queue est au-dessus de A, et la méthode de Culmann permet de construire un polygone funiculaire dont trois côtés passent par trois points donnés (on peut aussi employer la construction de M. Collignon).

A un diagramme mixtiligne tel que $A'_2 A''_2 a''_2 a'_2$, correspondra un diagramme mixtiligne formé de trois droites $h'_2 \alpha'_2$, $h'_2 h''_2$, $h''_2 \alpha''_2$ et d'un arc de courbe $\alpha''_2 \alpha'_2$. *Cette courbe sera une parabole égale à la première.* Nous laissons au lecteur le soin de démontrer ce théorème facile dont voici l'énoncé :

Étant données une parabole et une corde, si, à partir d'une droite arbitrairement donnée, on porte sur les diamètres de la parabole des segments égaux aux portions de diamètre interceptées entre la parabole et sa corde, le lieu des extrémités des segments ainsi obtenus est une parabole égale à la première.

La réciproque du théorème est vraie :

Étant données deux paraboles égales et à axes parallèles, si, à partir de l'une d'elles et sur les dia-

mètres, on porte des segments égaux aux portions interceptées sur ces diamètres entre l'autre parabole et une droite donnée, le lieu des extrémités des segments ainsi obtenus est une droite.

Il n'est pas d'ailleurs nécessaire d'avoir construit les paraboles de la figure 1 pour construire celles de la figure 4. Par exemple la parabole correspondant au deuxième essieu sera déterminée par la direction de son axe (perpendiculaire sur AB) et par trois points γ_2 , α'_2 , α''_2 tels que

$$A\gamma_2 = Cc_2, \quad h'_2\alpha'_2 = \alpha'_2 A'_2, \quad h''_2\alpha''_2 = \alpha''_2 A''_2.$$

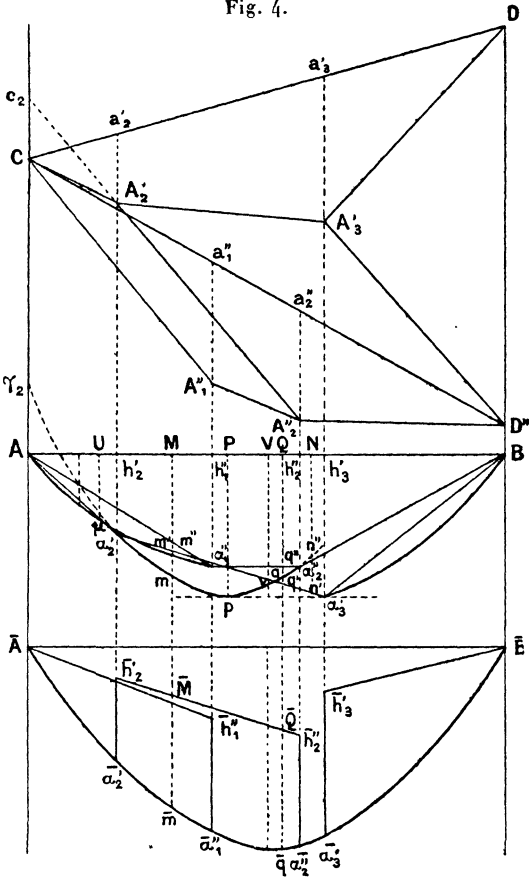
Le contour $AU\alpha'_2 m V\alpha'_3 B$ formé par des arcs de paraboles et par deux droites $V\alpha'_2$, $V\alpha'_3$ donne les moments fléchissants maximums en chaque point. Ainsi en M le moment maximum a pour valeur $Mm \times d$. On peut même suivre la variation du moment fléchissant en M; en effet, son quotient par la distance polaire d commence par avoir la valeur Mm' au premier instant où le convoi est entièrement engagé sur la poutre, croît jusqu'à la valeur Mm qu'il atteint au moment du passage du deuxième essieu (parce que m est sur le deuxième arc de parabole), et décroît jusqu'à la valeur Mm'' qui correspond à la sortie du convoi.

La figure 4 donnera sans peine le moment fléchissant le plus grand; ici il correspond au point P et se produit au moment du passage du deuxième essieu.

Théorème de M. Ventre. — Traçons une parabole quelconque égale à toutes les paraboles précédentes, par exemple celle dont l'axe est perpendiculaire au milieu de la poutre AB, et soit \overline{AB} la corde d'intersection de cette parabole avec les verticales des appuis. Reportons sur cette parabole le diagramme mixtiligne

$\alpha'_2 h'_2 h''_2 \alpha''_2 m \alpha'_2$; on sait, d'après la réciproque énoncée à la page précédente, qu'il suffit pour cela de porter sur deux diamètres, à partir de la nouvelle parabole, des

Fig. 4.



longueurs $\bar{\alpha}'_2 \bar{h}'_2$, $\bar{\alpha}''_2 \bar{h}''_2$ respectivement égales aux longueurs de même nom comprises entre AB et la parabole du deuxième essieu. En un point M quelconque de la poutre AB, le moment fléchissant sous le deuxième

essieu sera donné par le produit $\overline{Mm} \times d$, qui est égal à $Mm \times d$. D'où l'énoncé :

Si une poutre à deux appuis simples, portant ou non une charge permanente uniforme, est parcourue par un convoi quelconque, la valeur que prend le moment fléchissant sous un essieu déterminé, pendant la marche du train, est représentée par les ordonnées d'une parabole UNIQUE POUR TOUS LES ESSIEUX, ces ordonnées étant seulement comptées à partir de droites différentes pour les différents essieux.

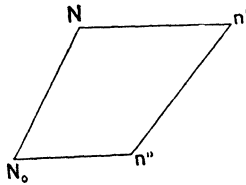
Le lecteur trouvera dans le traité de M. Maurice Lévy (§ 220 et suiv.) la règle très pratique et très simple que ce savant géomètre a déduite du théorème de M. Ventre.

Remarque. — Pour simplifier notre exposé, nous n'avons pas parlé de la charge permanente uniforme portée par la poutre. On sait que les moments de flexion qui en résultent sont représentés par les ordonnées d'une parabole orientée comme les précédentes, et doivent être ajoutés aux moments dont nous avons parlé. Il est facile de voir que cela revient à remplacer les paraboles du texte par d'autres paraboles, aussi toutes égales entre elles, mais avec un paramètre différent. Nous n'insisterons pas sur ce point.

Comparaison des deux méthodes. — La méthode Ventre n'exige le tracé que d'une parabole. La méthode Leman exige une parabole par essieu; mais, comme toutes ces paraboles sont égales, il suffit de tailler un gabarit en carton sur le patron de l'une d'elles et de s'en servir pour tracer les autres. Pour la recherche du moment maximum maximorum, la méthode Leman le donne immédiatement, comme le montre la figure 4;

cette recherche est plus délicate avec la méthode Ventre. L'une et l'autre méthodes montrent que, pour les points de la poutre situés entre h''_2 et h'_3 , le moment de flexion maximum n'est sans doute pas atteint pendant que le convoi est entièrement engagé sur la poutre; aucun essieu n'est, en effet, passé pendant cette période sur la section $h''_2 h'_3$. Mais, tandis que le diagramme Ventre n'offre aucune indication, le diagramme Leman montre que, pendant cette période, le moment de flexion au point N a déchu constamment de la valeur $Nn' \times d$ à la valeur $Nn'' \times d$. La figure 5 présenterait ici l'aspect suivant :

Fig. 5.



C'est donc très probablement avant que le train ne fût entièrement engagé sur la poutre que s'est produit le moment maximum, et il s'est produit à l'instant du passage du troisième essieu au-dessus du point N. On sait qu'au lieu de faire reculer le train, on peut avancer la poutre virtuellement d'une même quantité dans le sens de la marche; le même polygone des forces dans lequel on négligera la première charge, la même distance polaire et la plus grande partie des polygones funiculaires déjà dessinés pourront être utilisés. Nous n'insisterons pas sur ce cas qui, en somme, se rencontrera exceptionnellement dans la pratique.

Mais le diagramme Leman présente un dernier avantage. En effet, si l'on envisage les sections Vh'_2 ou Vh''_2 de la poutre, le diagramme Ventre fournit pour tous les

points de cette section un moment de flexion maximum. Au contraire le diagramme Leman montre nettement que cette conclusion serait erronée. Par exemple, au point Q, le premier diagramme donne comme moment de flexion $\bar{Q}\bar{q} = Qq$ au facteur d près; le deuxième montre que le moment commence par avoir la valeur $Qq' \times d$ et décroît constamment, en passant par la valeur $Qq \times d$ jusqu'à la valeur $Qq'' \times d$. Ici encore le moment maximum s'est produit avant que le convoi ne fût entièrement engagé sur la poutre. Le polygone des moments représenté (*fig. 6*) aurait ici l'aspect suivant :

Fig. 6.

