NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JEAN SERVAIS

Concours d'admission à l'École polytechnique en 1905

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 260-274

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__260_1>

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1905.

COMPOSITION D'ALGÈBRE ET TRIGONOMÉTRIE;

SOLUTION PAR M. JEAN SERVAIS.

1. *Démontrer que l'égalité*

$$\sin B = \frac{1}{5}\sin(2A + B)$$

entraîne la suivante :

$$\operatorname{tang}(A + B) = \frac{3}{2}\operatorname{tang} A.$$

II. *Calculer la valeur de e^2 à un dix-millième près (on ne supposera pas connue la valeur du nombre e).*

III. 1° *Trouver une série* S *ordonnée suivant les puissances entières et positives d'une variable x, et telle qu'on ait identiquement la relation :*

$$x(1+x)[2+(2-p)x]S'' \\ +[(p^2-p-2)x^2-4x-2]S'+2p[1+(2-p)x]S=0,$$

S' désignant la série des dérivées premières, et S'' la série des dérivées secondes des termes de la série S.

2° *Étudier les conditions de convergence des séries* S *ainsi obtenues.*

3° *Examiner en particulier les solutions qui s'annulent pour $x=0$.*

4° *Qu'arrive-t-il si p est un nombre entier et positif?*

N.-B. — *Les candidats pourront commencer par traiter les cas les plus simples où p a l'une des valeurs :* 1, 2, *ou* — 1.

La question I ne présente aucune difficulté; il suffit d'écrire l'égalité proposée sous la forme

$$\sin[(A+B)-A]=\frac{1}{5}\sin[(A+B)+A]$$

et de développer les deux membres.

La question II est un exercice de calcul facile.

Pour résoudre la question III, posons

$$S=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots+a_nx^n+\ldots.$$

Pour les valeurs de x comprises dans l'intervalle de convergence, S se comporte comme un polynome entier. En portant S et ses dérivées S' et S'' dans l'équation différentielle, et en égalant à zéro le terme constant, les coefficients de $x, x^2, x^3, \ldots, x^n$, on obtient, toutes réductions faites, les égalités suivantes :

$$\begin{gathered}
pa_0 - a_1 = 0,\\
2(2-p)(pa_0 - a_1) = 0,\\
6a_3 - (p-1)(p-2)a_1 = 0,\\
16a_4 - 4(p-3)a_3 = 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
2(n+1)(n-1)a_{n+1} - (n-2)[p(n+1) - 4n]a_n\\
\qquad + (n-3)[p^2 - p(n+1) + 2(n-1)]a_{n-1} = 0.
\end{gathered}$$

Les deux premières relations se réduisent à une et donnent

$$a_1 = pa_0.$$

Les deux suivantes donnent ensuite

$$a_3 = \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}a_0,$$

$$a_4 = \frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4!}a_0.$$

On voit apparaître la loi. L'expression de a_n est vraisemblablement

$$a_n = \frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{n!}a_0.$$

Pour montrer que c'est exact, il suffit de prouver que, si cette loi est vraie jusqu'à l'indice n, elle est encore vraie pour l'indice $n+1$, ce qui se vérifie au moyen de la relation générale entre a_{n+1}, a_n et a_{n-1}.

Tous les coefficients du développement sont déterminés en fonction de a_0, sauf le coefficient de x^2 qui reste arbitraire.

On voit alors que la série S est le développement de

$$S = a(1+x)^p + bx^2,$$

a et b étant arbitraires.

La série est alors, d'après des résultats bien connus, convergente pour les valeurs de x comprises entre -1 et $+1$.

La solution qui s'annule pour $x = 0$ est celle obtenue en faisant $a = 0$, c'est-à-dire

$$S = bx^2.$$

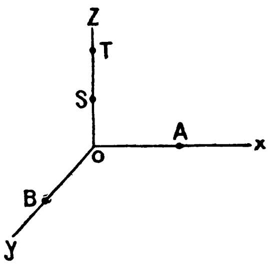
Enfin pour p entier positif le développement est limité au terme en x^p.

COMPOSITION DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE;

SOLUTION PAR M. PHILBERT DU PLESSIS.

Étant donnés trois axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy, Oz, *on considère deux cônes* (S)

Fig. 1.



et (T), *se coupant à angle droit suivant* Oz *et dont les sommets* S *et* T *sont situés sur la partie* POSITIVE *de* Oz, *de façon que*

$$OS = \gamma, \qquad OT = \gamma' \qquad (\gamma' > \gamma):$$

leurs bases dans le plan Oxy *sont des circonférences* *dont les centres et les rayons sont* A *et* a *pour* (S) *et* B *et* b *pour* (T) (A *sur* Ox, B *sur* Oy).

Les deux cônes ont ainsi en commun, outre l'axe Oz, *une courbe* (Γ).

1° *Former l'équation de la cubique* (C) *projection de* (Γ) *sur le plan* xOy, *et construire cette cubique.*

2° *Soit* PQ *une corde quelconque de* (Γ) [*obtenue, par exemple, en la considérant comme située sur une génératrice* (G) *d'un hyperboloïde passant par l'intersection* COMPLÈTE *des cônes* (S) *et* (T)]; *soit* pq *la projection de* PQ *sur le plan* xOy : *cette projection rencontre la cubique* (C), *outre les points* p *et* q, *en un troisième point* m.

On demande le lieu de la droite PQ *dans les cas suivants :*

I. *Le point* m *est fixe.*

II. *Les droites* Op *et* Oq *font des angles égaux avec* Ox.

III. *La corde* pq *est vue de l'origine suivant un angle droit. Généraliser.*

Les équations des deux cônes (S) et (T) sont

$$\text{(S)} \qquad \gamma(x^2+y^2) - 2ax(\gamma - z) = 0,$$

$$\text{(T)} \qquad \gamma'(x^2+y^2) - 2by(\gamma' - z) = 0.$$

En éliminant z, on a l'équation de la strophoïde

$$\text{(C)} \qquad (\gamma' ax - \gamma by)(x^2+y^2) - 2ab(\gamma' - \gamma)xy = 0.$$

Pour la construire coupons-la par une droite passant par le point double à l'origine

$$y = tx$$

et nous avons

$$(1)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{2ab(\gamma'-\gamma)t}{(\gamma' a - \gamma b t)(1+t^2)}, \\[2ex] y = \dfrac{2ab(\gamma'-\gamma)t^2}{(\gamma' a - \gamma b t)(1+t^2)}. \end{cases}$$

Le coefficient angulaire de la direction asymptotique est

$$t = \frac{\gamma' a}{\gamma b};$$

l'ordonnée à l'origine de l'asymptote est la limite de la différence

$$y - \frac{\gamma' a}{\gamma b}x = \frac{-2ab(\gamma'-\gamma)t}{\gamma b(1+t^2)},$$

lorsque t tend vers $\frac{\gamma' a}{\gamma b}$. L'équation de l'asymptote est donc

$$\frac{y}{\gamma' a} - \frac{x}{\gamma b} + \frac{2ab(\gamma'-\gamma)}{\gamma^2 b^2 + \gamma'^2 a^2} = 0.$$

Cette asymptote coupe la courbe en un point à distance finie qui correspond à la valeur $t = \frac{\gamma b}{\gamma' a}$ du paramètre.

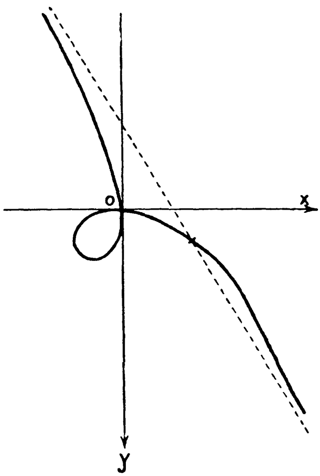
On est ainsi conduit à distinguer trois cas, suivant les positions relatives des deux valeurs $\frac{\gamma' a}{\gamma b}$ et $\frac{\gamma b}{\gamma' a}$.

1° Si $\gamma' a > \gamma b$, on a le Tableau suivant des valeurs de x et y :

t	$-\infty$		0		$\frac{\gamma b}{\gamma' a}$		$\frac{\gamma' a}{\gamma b}$		$+\infty$
x	0	$-$	0	$+$			$+\infty$ | $-\infty$	$-$	0
y	0	$+$	0	$+$			$+\infty$ | $-\infty$	$-$	0

et la forme de la courbe est celle de la figure 2.

Fig. 2.



2° Si $\gamma' a = \gamma b$, l'équation de la courbe se simplifie et devient

$$(x - y)(x^2 + y^2) - 2(b - a)xy = 0;$$

celle de l'asymptote est

$$y - x + b - a = 0.$$

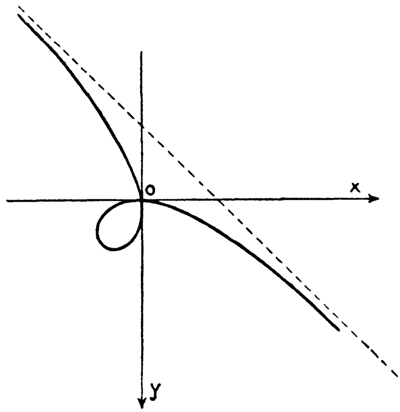
La courbe est une *strophoïde droite,* comme l'indique la figure 3.

3° Si $\gamma' a < \gamma b$, on a le Tableau :

t	$-\infty$		0		$\frac{\gamma' a}{\gamma b}$		$\frac{\gamma b}{\gamma' a}$	$+\infty$
x	0	$-$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-$		0
y	0	$+$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-$		0

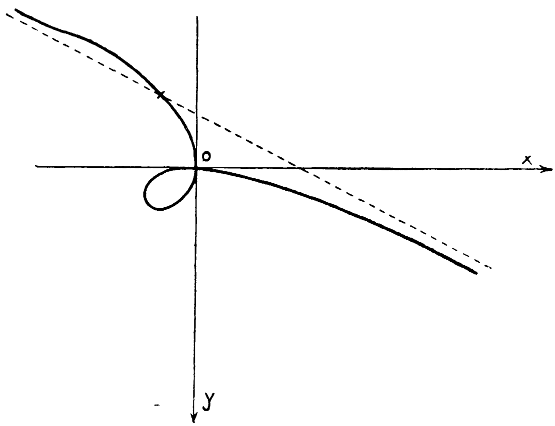
et la forme de la courbe est celle de la figure 4.

Fig. 3.



Pour traiter la seconde Partie, formons l'équation

Fig. 4.



d'un hyperboloïde (H) passant par l'intersection des deux cônes,

$$(\mathrm{H})\quad (\gamma+\lambda\gamma')(x^2+y^2)-2ax(\gamma-z)-2b\lambda y(\gamma'-z)=0.$$

Pour mettre les génératrices en évidence, écrivons cette équation sous la forme

$$x[(\gamma+\lambda\gamma')x-2a(\gamma-z)]+y[(\gamma+\lambda\gamma')y-2b\lambda(\gamma'-z)]=0.$$

Une corde PQ de la cubique est une génératrice (G) de même système que Oz. Ses équations sont donc

$$(2)\qquad \begin{cases} (\gamma+\lambda\gamma')y-2b\lambda(\gamma'-z)+\mu x=0, \\ (\gamma+\lambda\gamma')x-2a(\gamma-z)\quad-\mu y=0. \end{cases}$$

Elles représentent d'ailleurs les plans menés par PQ et respectivement les points T et S.

Faisons $z=0$ dans une de ces équations, la seconde par exemple; nous obtenons ainsi l'équation

$$(\gamma+\lambda\gamma')x-\mu y-2a\gamma=0,$$

qui représente la droite joignant les points de rencontre du cercle (A) et des rayons Op et Oq. Pour avoir les équations de ces rayons il suffit donc d'éliminer une variable d'homogénéité entre la dernière équation écrite et l'équation du cercle (A) dans le plan Oxy, ce qui donne

$$\gamma y^2+\mu xy-\lambda\gamma' x^2=0,$$

d'où l'équation aux coefficients angulaires de Op et Oq,

$$(3)\qquad \gamma t^2+\mu t-\lambda\gamma'=0.$$

La projection pq de la droite PQ sur le plan xOy s'obtient en éliminant z entre ces deux équations, ce qui donne

$$(4)\quad (\gamma+\lambda\gamma')(b\lambda x-ay)+2ab\lambda(\gamma'-\gamma)-\mu(ax+b\lambda y)=0.$$

Formons l'équation des droites qui joignent l'origine des coordonnées aux points d'intersection de la droite (D) et de la cubique (C); et nous obtenons, par un calcul facile,

$$(5) \qquad (ax + b\lambda y)(\lambda\gamma' x^2 - \mu xy - \gamma y^2) = 0.$$

Cette équation du troisième degré en $\frac{y}{x}$ admet d'abord la racine $-\frac{a}{b\lambda}$ *indépendante de* μ; c'est le coefficient angulaire de la droite Om. En effet, l'hyperboloïde (H) correspondant à une valeur donnée de λ a une seconde génératrice mM parallèle à Oz. Toutes les droites PQ étant des génératrices de (H) de système différent de celui de mM rencontrent cette droite en un point qui se projette sur le plan xOy en un point m de la cubique (C) projection du point M de l'espace où la droite Mm rencontre la cubique gauche. Lorsque λ reste fixe, m reste fixe, le coefficient angulaire de la droite Om doit donc bien être indépendant de μ; c'est donc bien $-\frac{a}{b\lambda}$.

I. Ce raisonnement prouve, de plus, que, pour que le point m reste fixe, il faut et il suffit que λ soit constant (c'est-à-dire que la génératrice mM reste fixe) et la droite PQ engendre l'hyperboloïde (H) correspondant à la valeur λ du paramètre.

II. Les coefficients angulaires des droites Op et Oq sont racines de l'équation (3) obtenue en débarrassant (5) de la racine $-\frac{a}{b\lambda}$ et en posant $t = \frac{y}{x}$. Pour que Op et Oq fassent des angles égaux avec Ox, il faut et il suffit que cette équation (3) ait des racines opposées, c'est-à-dire que $\mu = 0$. La droite PQ a alors pour équation :

$$(6) \qquad \begin{cases} \gamma y + \lambda[\gamma' y - 2b(\gamma' - z)] = 0, \\ \gamma x - 2a(\gamma - z) + \lambda\gamma' x = 0; \end{cases}$$

et elle engendre le paraboloïde

$$\gamma\gamma' xy - [\gamma x - 2a(\gamma - z)][\gamma' y - 2b(\gamma' - z)] = 0$$

ou

$$a\gamma' y(\gamma - z) + b\gamma x(\gamma' - z) - 2ab(\gamma - z)(\gamma' - z) = 0,$$

qui admet comme plans directeurs les plans

$$z = 0 \quad \text{et} \quad a\gamma' y + b\gamma x + 2abz = 0.$$

III. Pour que l'angle pOq soit *droit*, il faut et il suffit que le produit des racines de l'équation (3) soit égal à -1, c'est-à-dire que l'on ait

$$\lambda = \frac{\gamma}{\gamma'}.$$

On retrouve le cas I, le point m est fixe et la droite PQ engendre l'hyperboloïde

$$2\gamma\gamma'(x^2 + y^2) - 2a\gamma' x(\gamma' - z) - 2b\gamma y(\gamma' - z) = 0.$$

Les trois cas précédents sont des cas particuliers du cas plus général où les droites Op et Oq décrivent deux faisceaux en involution. Pour cela, il faut et il suffit que les racines t et t' de l'équation (3) vérifient une relation de la forme

$$\alpha tt' + \beta(t + t') + \delta = 0,$$

ce qui donne

$$\alpha\gamma'\lambda + \beta\mu - \delta\mu = 0.$$

Le lieu de la droite PQ s'obtient alors en éliminant λ et μ entre cette relation et les équations (2), ce qui donne la quadrique

$$\begin{vmatrix} \gamma' y - 2b(\gamma' - z) & x & \gamma y \\ \gamma' x & -y & \gamma x - 2a(\gamma - z) \\ \alpha\gamma' & \beta & -\delta\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE PAR M. V. JAMET.

Rappelons d'abord les propositions suivantes :

I. *Une cubique gauche ne peut couper une surface du second degré en plus de six points, à moins d'être contenue tout entière sur la surface.*

En effet, une cubique gauche étant définie par trois équations de la forme

$$(1) \qquad x = \frac{f_1(t)}{\varphi(t)}, \qquad y = \frac{f_2(t)}{\varphi(t)}, \qquad z = \frac{f_3(t)}{\varphi(t)},$$

où l'on a désigné par f_1, f_2, f_3, φ, quatre polynomes entiers du troisième degré, l'équation qui fait connaître les valeurs de t correspondant aux points où elle coupe une surface du second degré, sera elle-même du sixième degré. Donc, de deux choses l'une : ou elle a six solutions, et six seulement, et la cubique a six points, et six seulement, situés sur la surface; ou bien elle est vérifiée quel que soit t, et la cubique est située en entier sur la surface.

COROLLAIRE. — *Si une cubique gauche a sept points sur une surface du second degré, elle y est située tout entière.*

II. *Si une droite* Az *rencontre une cubique gauche en un point* A, *les cordes de la cubique qui s'appuient sur* Az *engendrent une surface du second degré.*

En effet, trois de ces cordes dont les extrémités sont, par exemple, M et N, P et Q, R et S, déterminent une surface du second degré Σ, qui contient la cubique tout entière; car, outre les six points, M, N, P, Q, R, S, cette surface contient la droite Az tout entière, et par conséquent un septième point de la cubique, le point A.

Mais chacune des droites dont nous cherchons le lieu géométrique est située en entier sur Σ, puisqu'elle a, sur cette surface, trois points, savoir : les deux points où elle s'appuie sur la cubique, et le point où elle coupe Az. Donc le lieu cherché est la surface Σ.

III. Si dans les équations (1) on donne à t, séparément, deux valeurs entre lesquelles il y a une relation involutive, elles déterminent, sur la courbe, deux points, M, N, qui, par définition, décrivent sur la courbe deux divisions en involution. Par exemple, les extrémités d'une corde de la cubique seront en involution, si cette corde est assujettie à rencontrer une droite fixe qui, comme dans le théorème précédent, s'appuie sur la cubique en un point fixe A. En effet, soit Az la droite fixe, et soit M un point mobile sur la cubique. Par ce point passe une corde MN, et une seule, qui s'appuie sur Az; son extrémité N est le troisième point d'intersection de la cubique avec le plan MAz; donc à toute position du point M répond une position, unique d'ailleurs, du point N, et inversement. D'ailleurs, les deux points s'échangent visiblement l'un dans l'autre, et ceci ne peut avoir lieu que s'il y a, entre les valeurs de t qui les déterminent, une relation involutive.

Réciproquement, *s'il y a involution entre deux points mobiles sur une cubique gauche, la droite qui les joint engendre une surface du second degré.*

En effet, soient, sur la cubique, (M, N), (P, Q), deux couples de points correspondants d'après l'involution donnée, A un point pris à volonté sur la cubique, Az une droite issue du point A et s'appuyant sur les deux droites MN, PQ. Une corde de la cubique, assujettie à s'appuyer sur Az, engendre une surface du second degré (II). Mais les extrémités de cette corde décrivent sur la cubique deux divisions en involution; et la correspondance entre ces deux points ne diffère pas de la correspondanee donnée, puisque, dans ces deux correspondances, il y a deux couples de points correspondants, savoir (M, N) et (P, Q), appartenant à l'une et à l'autre. Donc la surface du second degré, que nous venons de définir, coïncide avec le lieu cherché.

IV. Dans le sujet de concours il s'agissait d'une cubique gauche, intersection de deux cônes du second ordre, de sommets S et T, se coupant à angle droit suivant leur génératrice commune ST, et dont les bases sont des cercles situés dans un plan xOy, perpendiculaire à la droite ST. Ces deux cercles devront couper l'axe des z en un même point O. Leurs tangentes au point O sont les traces, sur le plan xOy, des plans tangents aux deux cônes suivant la droite ST, et la projection de la cubique commune aux deux cônes, sur le plan des xy, admettra nécessairement ces deux droites comme tangentes au point O. De plus, cette projection est une cubique circulaire, car, si l'on cherche à la déterminer par points (comme en Géométrie descriptive) en adoptant pour plans auxiliaires des plans horizontaux (parallèles à xOy), les sections faites dans les deux cônes par un tel plan sont des cercles, projetés horizontalement en vraie grandeur. Donc la courbe plane cherchée doit passer par les deux points communs à tous les cercles du plan xOy, c'est-à-dire par les deux ombilics du plan. En résumé, la projection cherchée est une cubique circulaire ayant, au point O, deux tangentes rectangulaires Ox, Oy; c'est donc une strophoïde.

V. Dans la deuxième partie de la composition, on proposait de rechercher le lieu décrit par une corde PQ de la cubique, dans divers cas où les points P, Q sont en involution; par exemple (§ I du texte) dans le cas où la projection de la droite PQ sur le plan xOy coupe la strophoïde définie ci-dessus, en un troisième point M supposé fixe. Mais alors, la parallèle à Oz, menée par m, s'appuie sur la cubique en un point fixe M et la droite PQ coupe une droite fixe Mm s'appuyant elle-même sur la cubique. En pareil cas elle engendre une surface du second degré. Cette surface est un hyperboloïde; car, si le point M vient en S, le point N vient en T, et la surface a deux génératrices parallèles à distance finie, savoir ST et Mm.

On ramène immédiatement à ce cas celui où la projection pq de PQ, sur le plan xOy, est vue du point O sous un angle droit (§ III du texte). En effet, d'après les propriétés connues de la strophoïde, la droite pq coupe alors la strophoïde en un point fixe m tel que la droite Om et la direction asymptotique réelle de la strophoïde sont également inclinées sur les tangentes au point O. Le lieu géométrique de PQ est encore un hyperboloïde.

Si les droites Op, Oq font avec Ox des angles égaux (§ II du texte), on démontre aisément que la droite pq enveloppe une parabole, de telle sorte que le contour apparent de la surface cherchée est parabolique; et la surface elle-même est un paraboloïde.