

G. FONTENÉ

**Discussion d'un triangle donné par les
points remarquables O, I, H**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 241-252

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__241_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[K2a et b]

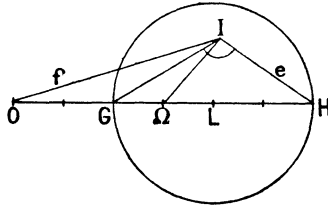
**DISCUSSION D'UN TRIANGLE DONNÉ PAR LES POINTS
REMARQUABLES O, I, H;**

PAR M. G. FONTENÉ.

I.

1. Un triangle ABC est déterminé quand on connaît le centre O du cercle circonscrit (fig. 1), le point de

Fig. 1.



concours des hauteurs H, le centre I d'un cercle tangent aux trois côtés, *cercle inscrit ou cercle ex-inscrit*. Au moyen des formules

$$(1) \quad \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr = 2R\left(\frac{R}{2} - r\right) \quad (\text{EULER}),$$

$$(2) \quad \Omega I = \frac{R}{2} - r \quad (\text{FEUERBACH}),$$

dans lesquelles r est négatif s'il s'agit d'un cercle ex-inscrit, on a d'abord

$$2R = \frac{\overline{OI}^2}{\Omega I};$$

on peut donc tracer le cercle circonscrit, le cercle des neuf points, et par suite le cercle I. Le triangle ABC

doit en outre être circonscrit à une conique de foyers O et H , admettant pour cercle directeur le cercle circonscrit. Si cette conique et le cercle I ont quatre tangentes communes, trois de ces tangentes portent les côtés du triangle; la quatrième n'est pas à considérer. Le problème ne peut avoir qu'une solution; il est du troisième degré.

2. En supposant que le triangle existe, on a ceci :

Le point L est le centre du cercle inscrit au triangle ABC , ou le centre d'un cercle ex-inscrit, selon que ce point est intérieur ou extérieur au cercle décrit sur GH comme diamètre, ou encore selon que l'angle GIH est obtus ou aigu.

On a en effet

$$\frac{\overline{OI}^2}{\overline{\Omega I}^2} = \frac{2R}{\frac{R}{2} - r},$$

et r sera positif si l'on a $\frac{OI}{\Omega I} > 2$; or, le lieu des points pour lesquels ce rapport est égal à 2 est le cercle décrit sur GH comme diamètre; donc...

On peut d'ailleurs appliquer le théorème de Stewart aux trois obliques IO , $I\Omega$, IL , le point L étant le milieu de GH , ce qui donne

$$\overline{IO}^2 + 3\overline{IL}^2 - 4\overline{I\Omega}^2 = 12\overline{\Omega L}^2 = 3\overline{GL}^2$$

ou

$$R(R - 2r) - (R - 2r)^2 = 3(\overline{LG}^2 - \overline{LI}^2)$$

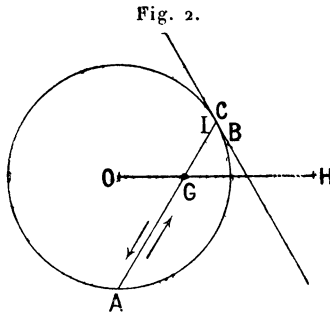
ou

$$2r(R - 2r) = 3(\overline{LG}^2 - \overline{LI}^2);$$

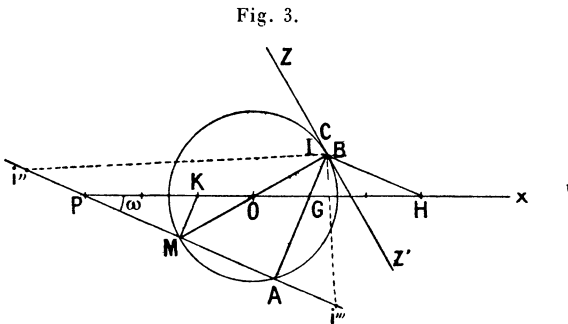
r sera positif si l'on a

$$LI < LG.$$

Lorsque l'angle GIH est droit, on a $r = 0$; ce cas singulier forme transition entre celui de la figure 5 et celui de la figure 6 : l'angle A est alors nul, ainsi que le côté BC (*fig. 2*). La vérification directe est facile.



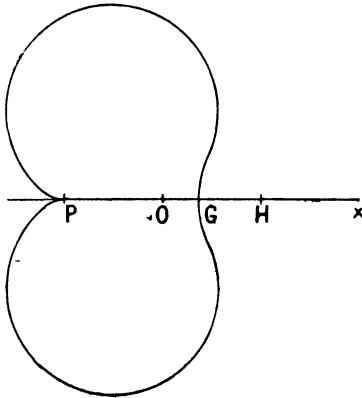
3. Les points O et H étant donnés, le point I variant, chacun des triangles ABC que l'on obtient est obtenu quatre fois, le point donné I pouvant être le centre i du cercle inscrit, ou le centre d'un cercle ex-inscrit, i' , i'' ou i''' (*fig. 3*). Chacun de ces triangles correspond à



une position du point I à l'intérieur du cercle décrit sur GH comme diamètre, et l'on verra par le calcul que le point I peut être quelconque dans ce cercle.

Si le point I est donné sur la circonférence même de ce cercle l'angle A et le côté BC devenant nuls, les points i et i' sont confondus en I , tandis que les points i'' et i''' viennent occuper des positions limites; ces positions limites se trouvent sur la perpendiculaire menée du point A à la droite AI , *perpendiculaire qui passe constamment par le point P symétrique de H par rapport à O* , et sur les bissectrices des angles AIz , AIz' . Le cercle O , circonscrit au triangle ABC , passant au milieu de $i''i'''$, le milieu M du segment PA est aussi le milieu de $i''i'''$, et IM est la médiane du triangle rectangle $Ii''i'''$, comme on peut d'ailleurs le voir directement. De là une construction simple de la courbe qui est le lieu des points limites i'' et i''' ; *ayant décrit deux circonférences sur PK et sur GH comme diamètres, on mène les parallèles variables PM et HI , et l'on rabat MI en Mi'' et en Mi'''* ; on obtient la courbe de la figure 4,

Fig. 4.



le point P est un point de rebroussement, et la courbe passe au point G .

Avec des coordonnées polaires du pôle P , comme

on a

$$\overline{Pi'' + Pi'''} = 2\overline{PM}, \quad \overline{Pi''} \times \overline{Pi'''} = -\overline{AI}^2,$$

l'équation de la courbe est, en posant $\text{OH} = k$,

$$(3) \quad \rho^2 - \frac{4k}{3} \rho \cos \omega - 4k^2 \sin^2 \omega = 0;$$

l'expression de ρ en fonction de ω traduit naturellement la construction ci-dessus

$$\rho = \text{PM} \pm \text{MI}.$$

L'équation en coordonnées cartésiennes montre que la courbe est une quartique admettant pour points doubles les points cycliques.

Au paragraphe II, l'équation se présentera sous la forme

$$3\rho^2 - 4\rho^2 kx - 12k^2(\rho^2 - x^2) = 0,$$

qui peut donner les limites de x , et celles de ρ ; je dirai seulement que les points de contact de la tangente double voisine de G sont les derniers sommets des deux triangles équilatéraux construits sur OH.

4. Les points O et H étant donnés, la courbe en question limite la région du plan à l'intérieur de laquelle le point I ne doit pas être donné pour que le triangle ABC existe.

Ce fait, que nous démontrerons rigoureusement, se comprend assez bien d'après ce qui précède; si l'on fait varier le point I, lorsque ce point franchit la circonférence décrite sur GH comme diamètre, les points i et i' s'échangent, on retrouve les mêmes triangles ABC, et les points i'' , i''' reprennent les positions qu'ils occupaient; après s'être approchés de la courbe limite, ils s'en écartent.

II.

5. Euler a formé l'équation du troisième degré qui a pour racines les longueurs des côtés du triangle ABC, en prenant comme données les longueurs

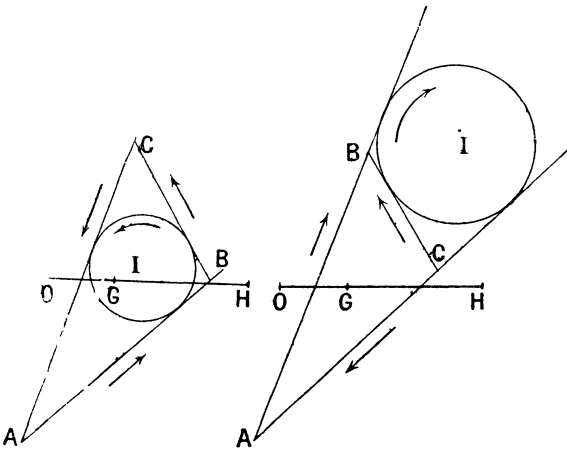
$$IH = e, \quad IO = f, \quad OH = k,$$

le point I étant le centre du cercle inscrit. Je me propose de *discuter* le problème en me plaçant dans le cas général où le point I est le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle.

6. Conformément aux figures 5 et 6, le plan étant

Fig. 5.

Fig. 6.



orienté par la flèche φ , nous désignerons par r le rayon du cercle I affecté du signe $+$ ou du signe $-$ selon qu'il s'agira d'un cercle inscrit ou d'un cercle ex-inscrit; on aura donc les formules (1) et (2). Les axes qui por-

tent les côtés du triangle étant dirigés comme tangentes au cercle I, nous poserons

$$a = \overline{BC}, \quad b = \overline{CA}, \quad c = \overline{AB},$$

de sorte que, dans le cas de la figure 6, a sera négatif.

Avec $2p = a + b + c$, on aura toujours

$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c),$$

$$S = pr, \quad abc = 4RS,$$

S ayant un signe déterminé par le sens de circulation ABC.

Nous poserons encore

$$s = a + b + c,$$

$$t = bc + ca + ab,$$

$$u = abc,$$

de sorte que a, b, c seront racines de l'équation

$$x^3 - sx^2 + tx - u = 0.$$

7. On a, entre les trois inconnues principales s, t, u , et les deux inconnues auxiliaires R, r , les cinq équations suivantes :

$$(4) \quad R^2 - 2Rr = f^2 \quad \text{ou} \quad 2R\left(\frac{R}{2} - r\right) = f^2,$$

$$(5) \quad \left(\frac{R}{2} - r\right)^2 = \frac{2e^2 + 2f^2 - k^2}{4},$$

$$(6) \quad s^2 - 2t = 9R^2 - k^2,$$

$$(7) \quad t - \frac{s^2}{4} = r^2 + 4Rr,$$

$$(8) \quad u = 2Rr \times s.$$

Les équations (4) et (5) sont données par les formules (1) et (2). On a (8) en écrivant

$$abc = 4RS = 4Rpr = 2Rr \times s.$$

L'équation (6) se tire de la formule barycentrique

$$\sum \overline{MA}^2 = 3 \overline{MG}^2 + \frac{\Sigma a^2}{3},$$

en mettant M en O. On obtient (7) en écrivant

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p} \\ &= \frac{p^3 - 2p^3 + p \Sigma ab - 4Rrp}{p} \\ &= -p^2 + \Sigma ab - 4Rr. \end{aligned}$$

8. Les équations (4) et (5) donnent

$$(9) \quad R^2 = \frac{f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

$$(10) \quad 2Rr = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

$$(11) \quad 4r^2 = \frac{(k^2 - 2e^2 - f^2)^2}{2e^2 + 2f^2 - k^2}.$$

Les équations (6) et (7) donnent

$$s^2 = 18R^2 - 2k^2 + 4r^2 + 16Rr,$$

$$2t = 9R^2 - k^2 + 4r^2 + 16Rr;$$

on en déduit, en ordonnant par rapport à k ,

$$(12) \quad s^2 = \frac{3k^4 - 8k^2e^2 + 2k^2f^2 + 4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

$$(13) \quad t = \frac{k^4 - 3k^2e^2 + 2k^2f^2 + 2e^4 - 6e^2f^2 + f^4}{2e^2 + 2f^2 - k^2}.$$

On a d'ailleurs

$$(14) \quad u = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2} s.$$

[La formule (12) est reproduite dans les *Nouvelles Annales*, 1^{re} série, t. I, p. 85, avec f^4 au lieu de $11f^4$;

à la page 84, ligne 13 et 15, on a mis également f^4 au lieu de $27 f^3$ et p^2 au lieu de p^3 .]

9. On connaît donc s , t , u , et l'on peut calculer a , b , c . Pour la discussion, il faut observer que, si l'on trouve a , b , c réels, comme r^2 est positif d'après (11), on a

$$p(p-a)(p-b)(p-c) > 0,$$

de sorte que l'existence du triangle ABC est alors assurée. Les conditions requises sont donc :

- 1° Que s^2 soit positif ou nul ;
- 2° Que l'équation du troisième degré ait ses racines réelles.

10. Supposons pour un instant la première condition remplie.

Pour écrire que l'équation

$$x^3 - sx^2 + tx - u = 0$$

a ses racines réelles, on écrit que le résultant des deux équations

$$3x^2 - 2sx + t = 0,$$

$$sx^2 - 2tx + 3u = 0$$

est négatif ou nul.

En posant

$$\Delta = 3t - s^2, \quad \Delta' = 3su - t^2, \quad \Theta = 9u - st,$$

on a la condition

$$(15) \quad \Theta^2 - 4\Delta\Delta' \leq 0.$$

On trouve, après suppression du facteur

$$2e^2 + 2f^2 - k^2$$

aux deux termes de chacune des trois fractions obtenues,

$$(16) \quad \Delta = e^2 - 4f^2,$$

$$(17) \quad \theta = s(k^2 - e^2 - 5f^2),$$

$$(18) \quad \Delta' = \frac{\left\{ \begin{array}{l} k^6 - k^4(4e^2 + 3f^2) + k^2(5e^4 + 4e^2f^2 + 3f^4) \\ - 2e^6 + 2e^4f^2 + 8e^2f^4 - 17f^6 \end{array} \right\}}{2e^2 + 2f^2 - k^2}.$$

11. Le premier membre de la condition (15) est donc du huitième degré par rapport aux quantités e, f, k : des considérations géométriques vont nous permettre de lui donner une forme simple. Lorsque le point I est sur la droite OH, le triangle ABC est isocèle, I étant le centre du cercle inscrit, ou du cercle ex-inscrit dans l'angle compris entre les côtés égaux; on a, par exemple,

$$\overline{CA} = \overline{AB} \quad \text{ou} \quad b = c,$$

et l'équation du troisième degré a alors deux racines égales; le premier membre de la condition (15) contient donc en facteur l'expression

$$k^4 - 2k^2(e^2 - f^2) + e^4 - 2e^2f^2 + f^4,$$

qui représente $-16T^2$, T étant l'aire du triangle OIH.

Ce premier membre contient également le facteur

$$k^2 - 2e^2 - f^2;$$

en effet, quand cette expression est nulle (ce qui arrive si l'on a $LI = LG$) on a $r = 0$ d'après (10), et par suite $u = 0$; on a donc, par exemple, $a = 0, b = c$ (fig. 2), et l'équation du troisième degré a encore deux racines égales.

La condition (15) est alors de la forme

$$(k^4 + e^4 + f^4)(k^2 - 2e^2 - f^2)(\alpha k^2 + \beta e^2 + \gamma f^2) \leq 0,$$

α, β, γ sont des nombres. On détermine ces nombres par les termes en k^8, e^8, f^8 , et l'on a finalement

$$-16T^2 \times (k^2 - 2e^2 - f^2)^2 \leq 0,$$

condition remplie d'elle-même. Ainsi, *pourvu que s soit réel, le triangle ABC existe.*

12. On a donc la seule condition

$$4e^4 - 12e^2f^2 + 11f^4 - 8k^2e^2 + 2k^2f^2 + 3k^4 \geq 0.$$

Les points O et H sont supposés fixes, le point I étant variable, la région possible pour ce point est limitée par une certaine courbe. Avec des axes de coordonnées rectangulaires, dont l'origine est par exemple au milieu de OH (*fig. 4*), on trouve que la courbe a un point de rebroussement au point P qui est le symétrique de H par rapport à O.

Mettant alors l'origine des coordonnées au point P, et posant $PM = \rho$, on a pour l'équation de la courbe en coordonnées x et ρ :

$$\begin{aligned} &4(\rho^2 - 4kx + 4k^2)^2 \\ &- 12(\rho^2 - 4kx + 4k^2)(\rho^2 - 2kx + k^2) \\ &+ 11(\rho^2 - 2kx + k^2)^2 - 8k^2(\rho^2 - 4kx + 4k^2) \\ &\quad + 2k^2(\rho^2 - 2kx + k^2) + 3k^4 = 0 \end{aligned}$$

ou

$$3\rho^4 - 4\rho^2kx - 12k^2(\rho^2 - x^2) = 0;$$

la courbe est bien celle que l'on a obtenue au paragraphe I.

Le point I doit être extérieur à cette courbe, puisque le premier membre de l'équation précédente doit être positif.

Lorsque le point I est sur la courbe limite, on a

$$s = 0,$$

par suite

$$u = 0,$$

c'est-à-dire, par exemple,

$$b = 0, \quad a + c = 0;$$

l'angle B de la figure 6 devient nul.

III.

13. Le triangle obtenu ABC peut être isocèle, le cercle I étant ex-inscrit dans l'un des angles à la base; on a alors, par exemple, $\overline{BA} = \overline{BC}$ (fig. 6), où $c + a = 0$.

La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$(a + b + c)(bc + ca + ab) = abc \quad \text{ou} \quad st = u,$$

ce qui donne

$$t = \frac{f^2(k^2 - 2e^2 - f^2)}{2e^2 + 2f^2 - k^2},$$

et ensuite

$$k^4 - k^2(3e^2 - f^2) + 2(e^2 - f^2)^2 = 0.$$

On trouve que le point I doit être sur une hyperbole ayant ses sommets aux points O et G, et dont les asymptotes font avec OG des angles de 60° ; cette hyperbole rencontre la courbe de la figure 4 en deux points dont les ordonnées ont leurs pieds en P, et la partie de l'hyperbole intérieure à la courbe limite est naturellement à rejeter.