

L. DENY

**Note sur la représentation géométrique
des polynômes algébriques**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 193-211

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__193_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

[X4a et b]

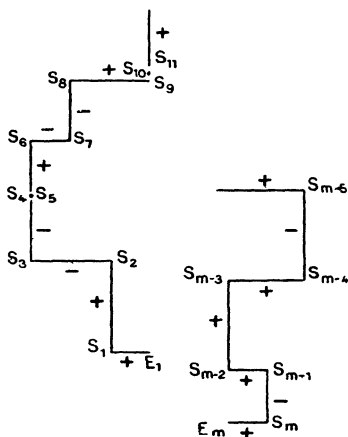
NOTE SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE
DES POLYNOMES ALGÈBRIQUES;

PAR LE COMMANDANT L. DENY,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

I. — PRÉLIMINAIRES.

Nous appelons *orthogone* une ligne brisée à angles droits telle que $E_m S_m \dots S_1 E_1$ (fig. 1), dont les éléments

Fig. 1.



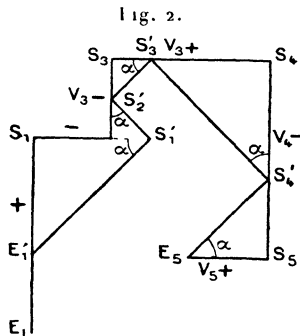
ments parallèles consécutifs sont marqués du même signe ou de signes contraires suivant qu'ils sont tracés d'un même côté, ou de côté et d'autre de l'élément perpendiculaire adjacent commun. Le mot *consécutif* implique la succession des sommets dans l'ordre naturel des indices, sans lacune. Si un ou plusieurs éléments sont nuls, comme au point double $S_4 - S_5$ ou au point

triple $S_9 - S_{10} - S_{11}$, pour appliquer la règle il faudra rétablir par la pensée les côtés absents et considérer chaque sommet simple comme origine des positifs et des négatifs, en tenant compte des précédents. Un choix initial reste arbitraire : en vue de la commodité des calculs, nous adoptons pour les deux directions commandées par le sommet S_m , supposées horizontale et verticale, les inverses des signes de la Géométrie analytique.

Il sera toujours possible de faire entrer à leur rang dans une construction orthogonale, et avec leur valeur et leur signe, les coefficients d'un polynôme entier.

La figure obtenue représente une équation algébrique ; car elle prête à la recherche des facteurs irréductibles du polynôme.

Soit, en effet, l'orthogone S de cinq sommets (*fig. 2*) :



une oblique $E_5S'_4$, tracée sous l'angle α , peut servir de premier élément à un orthogone $S'_4S'_3\dots$ ayant ses sommets sur les côtés du proposé et mêmes extrémités ; $\tan \alpha$ étant quantité positive, V_5, V_4, \dots, V_0 des nombres à signe latent représentant les côtés de S , on pourra écrire d'abord

$$S_5S'_4 = V_5 \tan \alpha,$$

puis pour les restes successifs jusqu'au dernier :

$$S'_4 S_4 = V_5 \operatorname{tang} \alpha + V_4,$$

$$S'_3 S_3 = V_5 \operatorname{tang}^2 \alpha + V_4 \operatorname{tang} \alpha + V_3,$$

.....,

$$E'_1 E_1 = V_5 \operatorname{tang}^5 \alpha + V_4 \operatorname{tang}^4 \alpha + V_3 \operatorname{tang}^3 \alpha \\ + V_2 \operatorname{tang}^2 \alpha + V_1 \operatorname{tang} \alpha + V_0.$$

En vertu de la règle des signes, les sommes algébriques sont traduites par des expressions où n'intervient pas l'indication de *différence*, et il en résulte que celle du dernier reste $E'_1 E_1$ représente la valeur du polynome pour $x = + \operatorname{tang} \alpha$. Si ce reste est nul (E'_1 coïncidant avec E_1), $\operatorname{tang} \alpha$ sera une racine.

Dans le cas où $S_5 S_4$ aurait dû être tracé dans la direction opposée par rapport à S_5 , V_4 serait un élément positif, et $\operatorname{tang} \alpha$ deviendrait une quantité négative. Nous laissons du reste au lecteur le soin d'examiner toutes les variantes possibles (inscription, ex-inscription, ou mélange des deux formes), qui peuvent se présenter. Nous ne voulons noter que ceci : S' figure le polynome quotient du proposé S par le facteur du premier degré correspondant à la racine, et il est facile de s'en assurer par un calcul analogue au précédent. Dès lors, on peut opérer sur l'inscrit de $m - 1$ sommets comme sur l'orthogone primitif, par conséquent arriver à la détermination de toutes les racines réelles et du polynome résidu irréductible ou tout au moins n'admettant plus de facteurs du premier degré.

Les ressources que l'on peut tirer ainsi de cette Géométrie ont déjà été remarquées. Dès 1867, les *Nouvelles Annales* (t. VI, p. 359) faisaient mention du procédé du capitaine Lill, de l'armée autrichienne, pour résoudre les équations par des figures identiques à celles que nous appelons *orthogones* et à l'aide d'un instrument dont la partie essentielle était un disque

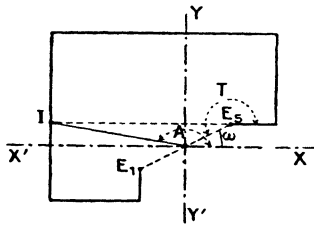
gradué portant quadrillage. En 1893, dans le *Bulletin de la Société mathématique* (t. XXI), M. G. Arnoux préconisait l'étude des mêmes figures et le principe d'un appareil, sorte de règle à compas, pour la recherche des facteurs (1). Ignorant ces travaux antérieurs (nous devons à la bienveillante érudition de M. Laisant de pouvoir les citer) et peu enclin à une méthode de tâtonnement que nous estimions décevante, nous avons envisagé la conception qui se présentait à notre esprit comme la base d'une sorte d'algèbre de forme particulière s'adaptant sans doute plus spécialement à la résolution des équations numériques, mais pouvant aussi atteindre la théorie. C'est cette tendance qui nous différencie de nos prédécesseurs.

Nous présentons ici les linéaments principaux de notre étude qui est susceptible d'extensions.

II. — PRINCIPES GÉNÉRAUX.

Traçons, sur la figure 3, deux axes de projection,

Fig. 3.



parallèles aux côtés de l'orthogone, et passant par le

(1) Voir pour plus amples renseignements :

A. FAVARO, *Leçons de Statique graphique* (traduction P. TERNIER). *Méthode de Lill* (II^e Partie, p. 197). Paris, Gauthier-Villars; 1885.

Publications de M. Gabriel Arnoux : Deux fascicules sur l'*Algèbre graphique* (Digne, Chaspoul, 1890); A. F. A. S. (Congrès de Marseille), 1891, *Étude de méthode graphique*.

milieu O de E, E_m. En appelant R la moitié de cette ligne, il vient (1) :

$$V_m - V_{m-2} + V_{m-4} \dots = -2R \cos \omega = +2R \cos A = +2R \cos T,$$

$$V_{m-1} - V_{m-3} + V_{m-5} \dots = +2R \sin \omega = +2R \sin A = -2R \sin T.$$

Ces formules nous serviront tout d'abord à réduire à la même échelle deux figures données.

Soient S' et S'' deux orthogones, l'un de trois, l'autre de quatre côtés, que nous faisons ainsi aboutir aux mêmes extrémités.

Portons sur chacun des côtés de S' des semblables à S'' (fig. 4) et inversement sur les côtés de S'' des semblables à S' (fig. 4^{bis}). Ces constructions fournissent les deux mêmes directions rectangulaires, et à un facteur près ($\frac{1}{2R}$) les côtés des superposés représentent en grandeur et en signe les sous-produits venant dans la multiplication des polynomes correspondant aux orthogones donnés.

Pour tracer le résultant S de cinq sommets, combinaison des proposés, il suffira de suivre graphiquement les phases de l'addition algébrique, c'est-à-dire de porter sur chaque direction, en tenant compte des signes, les longueurs qui figurent les produits élémentaires; le premier et le dernier sommet sont donnés immédiatement; le second et l'avant-dernier par la superposition de deux lignes; ainsi de suite.

Les figures 4 et 4^{bis} prêtent à deux remarques :

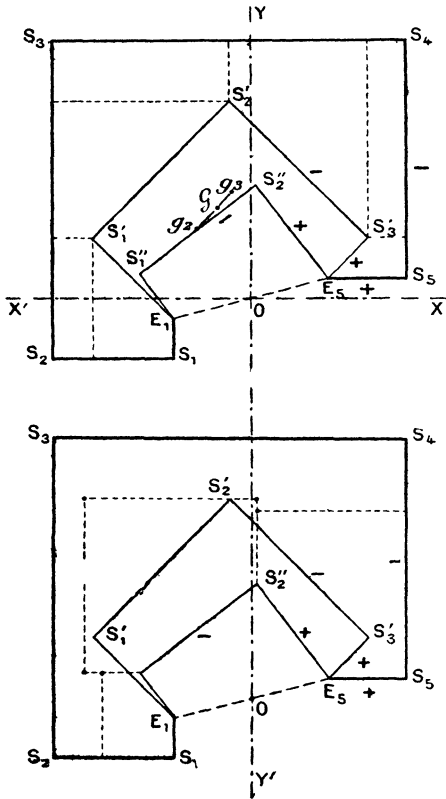
a. L'angle E₁ E₅ S₅ dans le résultant est la somme des angles E₁ E₃ S'₃ et E₁ E₅ S''₂ similaires dans les composants.

(1) A = π - ω, T = π + ω, A + T = 2π.

(198)

b. Les axes de projections XX' , YY' étant tracés sur les deux figures, si l'on appelle x, y ; x', y' ; x'', y'' les coordonnées des points S, S', S'' , on arrive facilement,

Fig. 4 et 4^{bis}.



en consultant alternativement les figures 4 et 4^{bis}, à vérifier les deux relations

$$\sum x = \sum x' + \sum x'',$$

$$\sum y = \sum y' + \sum y''.$$

D'où un énoncé général :

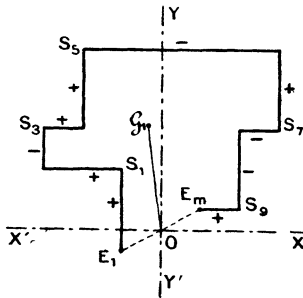
L'angle T, que nous appellerons ANGLE DE L'ORTHO-GONE, est la somme algébrique des mêmes angles dans les composants; le point G₁, barycentre des sommets, est le résultant statique des similaires dans les composants.

Ces propriétés fondamentales de l'orthogone subsistent à toutes les phases de la décomposition, qu'elle soit complète ou incomplète.

Nous avons déjà donné les expressions ressortissant à la notion de l'angle A égal à (2π - T) (fig. 3); la méthode de projection nous servira encore à déterminer sous une forme analogue les coordonnées de G₁.

On a, en effet (fig. 5),

Fig. 5.



$$\begin{aligned}
 x_9 &= + R \cos A + V_9, \\
 x_8 &= + R \cos A + V_9, \\
 x_7 &= + R \cos A + V_9 - V_7, \\
 &\dots\dots\dots, \\
 x_1 &= + R \cos A + V_9 - V_7 + V_5 - V_3 + V_1;
 \end{aligned}$$

de sorte que, si l'on appelle R₁ la longueur OG₁ et A₁

l'angle GOX, il vient

$$m R_1 \cos A_1 = + m R \cos A + m V_m - (m - 2)V_{m-2} \\ + (m - 4)V_{m-4} - \dots \quad (1)$$

et

$$m R_1 \sin A_1 = + m R \sin A - (m - 1)V_{m-1} \\ + (m - 3)V_{m-3} - \dots$$

III. — RÉOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES.

Les principes que nous venons d'établir aboutissent à un procédé de recherche des racines par les intersections d'un cercle et d'une courbe.

Soit, en effet, S' orthogone solution du proposé S de huit sommets. On a (fig. 6)

$$y'_7 = y_8 + V_8 \tan \alpha,$$

$$y'_6 = y_7,$$

$$y'_5 = y_6 - V_8 \tan^3 \alpha - V_7 \tan^2 \alpha - V_6 \tan \alpha,$$

$$y'_4 = y_5,$$

$$y'_3 = y_4 + V_3 \tan^5 \alpha + \dots + V_4 \tan \alpha,$$

$$y'_2 = y_3,$$

$$y'_1 = y_2 - V_8 \tan^7 \alpha - \dots - V_2 \tan \alpha.$$

Désignons par Y l'ordonnée du point sommet de l'orthogone du premier degré correspondant à la racine $\tan \alpha$, Y est égal à $\sum y - \sum y'$. Il vient

$$Y - y_1 = -V_8(\tan^7 \alpha - \tan^5 \alpha + \tan^3 \alpha - \tan \alpha) \\ + V_7(\tan^6 \alpha - \tan^4 \alpha + \tan^2 \alpha) + \dots \\ + V_4 \tan^2 \alpha + V_2 \tan \alpha,$$

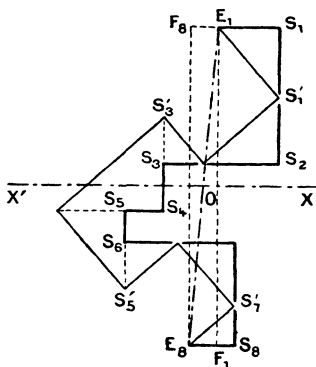
(1) A remarquer la parenté de ces formules avec celles de la dérivée analytique.

et de même

$$\begin{aligned} X - x_1 = & -V_8(\operatorname{tang}^6 \alpha - \operatorname{tang}^4 \alpha + \operatorname{tang}^2 \alpha) \\ & - V_7(\operatorname{tang}^5 \alpha - \operatorname{tang}^3 \alpha + \operatorname{tang}^1 \alpha) - \dots \\ & - V_4 \operatorname{tang}^2 \alpha - V_3 \operatorname{tang}^1 \alpha. \end{aligned}$$

En éliminant $\operatorname{tang} \alpha$ on aura une courbe du septième

Fig. 6.



degré, dont l'équation sera, l'origine étant reportée au point $F_m(-R \cos A, +R \sin A)$,

$$(a) \begin{cases} x^7 - (V_8 - V_6 + V_4 - V_2)x^6 - (V_7 - V_5 + V_3)yx^5 \\ \quad + (V_8 - V_6 + V_4)y^2x^4 + (V_7 - V_5)y^3x^3 \\ \quad - (V_8 - V_6)y^4x^2 - V_7y^5x + V_8y^6 = 0, \end{cases}$$

et les points-solution correspondant aux racines réelles seront marqués par les intersections de cette courbe avec la circonférence du cercle tracé sur E_1E_m comme diamètre.

Un calcul analogue sur un orthogone d'un nombre impair de sommets, sept par exemple, donnerait une courbe du sixième degré qui, rapportée à l'ori-

gine $F_1(+R \cos A, -R \sin A)$, aurait pour équation

$$(b) \begin{cases} y^6 + (V_6 - V_4 + V_2)y^5 \\ + (V_7 - V_5 + V_3)xy^4 - (V_6 - V_4)x^2y^3 \\ - (V_7 - V_5)x^2y^2 + V_6x^4y + V_7x^5 = 0 \quad (1). \end{cases}$$

En jetant les yeux sur le tableau des coordonnées des sommets, on voit pourquoi, x^{m-1} ou y^{m-1} étant positifs, les signes des autres coefficients se suivent dans la cadence $- - + +$ si m est pair, $+ + - -$ si m est impair; cette observation permet d'écrire les courbes (a) et (b) pour un degré quelconque, sans calculs.

Il peut paraître compliqué de baser la recherche des racines sur la détermination des points communs à une courbe de degré $m - 1$ et à un cercle, les intersections étant normalement en nombre $2m - 2$. Mais l'indécision n'est qu'apparente, car les courbes admettent un point de multiplicité $m - 2$ qui est précisément l'origine, F_m ou F_1 , située sur le cercle. Il ne reste donc que m intersections possibles répondant à la question.

Les courbes (a) et (b) sont d'une étude facile, mises sous la forme

$$(a) \quad x = \varphi(\mu), \quad y = \mu \varphi(\mu),$$

$$(b) \quad x = \sigma \varphi(\sigma), \quad y = \varphi(\sigma),$$

φ est une fonction de degré $m - 2$; μ et σ l'inclinaison sur l'axe des X et sur l'axe des Y de droites partant de l'origine F_m ou F_1 . On a du reste

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\mu \varphi' \mu + \varphi \mu}{\varphi' \mu} \quad \text{ou} \quad \frac{\varphi' \sigma}{\sigma \varphi' \sigma + \varphi \sigma}$$

(1) On peut aussi, en faisant intervenir $\cot \alpha$ au lieu de $\tan \alpha$, trouver des conjuguées a' et b' , mais qui sont rapportées, savoir : a' à l'origine F_1 , b' à l'origine F_m , et dans lesquelles V_m, V_{m-1}, \dots sont remplacés respectivement par V_0, V_1, \dots

et

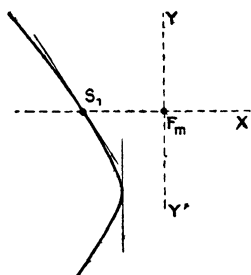
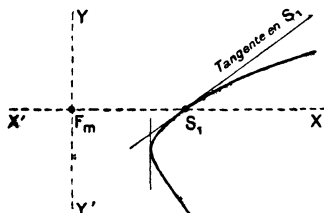
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mu\varphi''\mu + 2\varphi'\mu}{(\varphi'\mu)^2} \text{ ou } \frac{\varphi''\sigma}{(\varphi'\sigma + \varphi\sigma)^2}.$$

Nous resterons dans les généralités, ne voulant ici que donner des notions sur l'allure des courbes ⁽¹⁾

Courbes μ : m est pair. — $\mu = 0$ fournit S_1 , dernier sommet de l'orthogone : la tangente en ce point $\frac{\varphi(0)}{\varphi'(0)}$, soit $\frac{V_m - V_{m-1} \mp V_2}{V_{m-1} - V_{m-3} + \dots}$, est en général inclinée sur l'axe de X.

Si $\varphi(\mu)$ n'a pas de racines réelles, x ne pourra être égal à 0, si ce n'est au point F_m qui restera isolé avec la multiplicité $m - 2$. D'autre part, $\varphi'(\mu)$, fonction impaire, aura une racine et une seule fournissant un maximum ou un minimum de x par une tangente verticale. On aura donc l'une des deux formes γ ou γ^{bis} , la

Fig. 7.

Fig. 7^{bis}.

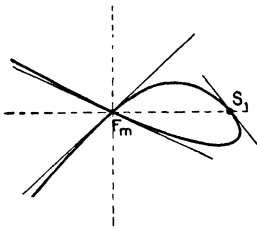
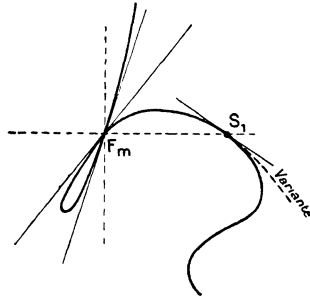
convexité étant toujours tournée vers l'axe des Y. Si l'on rapporte sur ces figures le cercle d'un orthogone,

(¹) L'étude des cas particuliers, ceux où l'on suppose absents certains coefficients de φ , aboutit à une classification des équations en familles qui ressortissent à des tracés caractéristiques. Elle fournit, dans la pratique, des observations intéressantes.

on reconnaît que, suivant les positions relatives de E_1 et de S_1 , il y aura 0 ou 2 solutions.

Si $\varphi(\mu)$ a deux racines, de même signe ou de signes opposés, il y a deux tangentes à l'origine qui comporte alors un point isolé $m - 4$ et un point double sur la courbe; car x et y changent de signe entre les racines. On aura une des deux formes 8 ou 8^{bis} soit telles quelles,

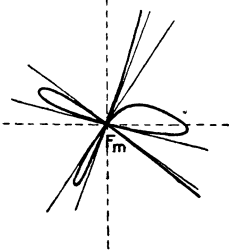
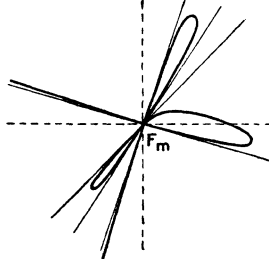
Fig. 8.

Fig. 8^{bis}.

soit inversées par rapport à l'axe des Y; $\varphi'(\mu)$ a une ou trois racines, d'où une ou trois tangentes verticales. Le nombre des racines de l'équation proposée ne peut pas être supérieur à quatre.

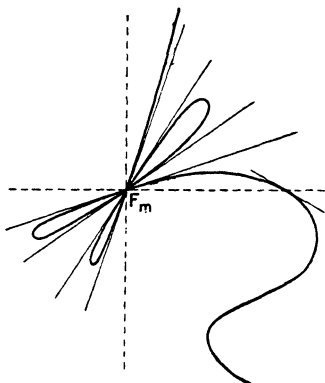
Avec quatre racines en $\varphi(\mu)$, suivant leur groupement possible par signes, on obtient les figures 9, 9^{bis}

Fig. 9.

Fig. 9^{bis}.

et 9^{ter}, et il est aisé d'imaginer les formes que l'on

obtiendrait avec six, huit, etc. tangentes à l'origine; on aboutit en dernier lieu au cas où, φ ayant toutes ses

Fig. 9^{ter}.

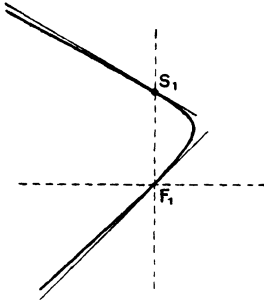
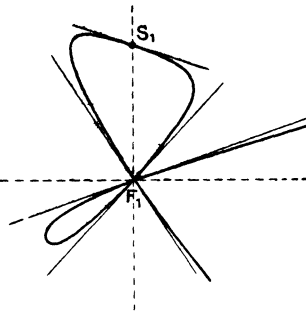
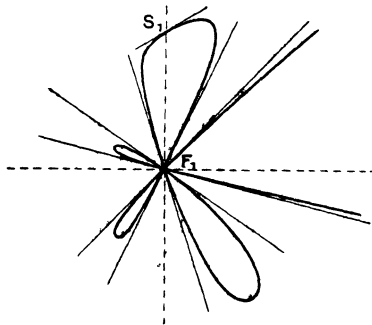
racines réelles, le point F_m est totalement soudé à la courbe.

Courbes σ : m est impair. — Dans les courbes σ l'allure générale est la même que dans les courbes μ . Signalons toutefois que le point S_1 (pour $\sigma = 0$) est sur l'axe des Y , et que l'origine F_1 est toujours sur le tracé de la courbe, à titre de point simple ou de multiplicité impaire. Les figures 10, 10^{bis}, 10^{ter} correspondent au cas où $\varphi(\sigma)$ a une, trois, ou cinq racines, et le polynôme proposé un, un ou trois, un, trois ou cinq facteurs du premier degré.

Nous risquerions de laisser dans l'ombre un point important, si nous ne signalions pas un avantage inhérent à l'emploi des courbes que nous proposons, celui d'avoir le caractère d'une méthode. Pour le tracé et la détermination des accidents importants, nous sommes amené à l'étude d'un polynôme de degré $m - 2$, avec

abaissement de deux degrés par rapport au polynôme proposé, ou à celle des dérivées de φ_{m-2} . Mais les fonctions φ_{m-2} étant entières peuvent, d'après le même principe, être étudiées elles-mêmes à l'aide de fonc-

Fig. 10.

Fig. 10^{bi}.Fig. 10^{ter}.

tions φ_{m-4} , et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on arrive au second ou au premier degré.

Il est facile de constituer la chaîne de ces polynomes.

Si l'on a, par exemple,

$$P_8 = V_8 x^8 + V_7 x^7 + \dots,$$

il viendra successivement

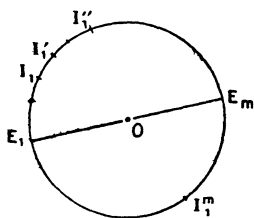
$$\begin{aligned} \varphi_6 &= -V_8 \mu_1^6 + V_7 \mu_1^5 + (V_8 - V_6) \mu_1^4 \\ &\quad - (V_7 - V_5) \mu_1^3 - (V_8 - V_6 + V_4) \mu_1^2 \\ &\quad + (V_7 - V_5 + V_3) \mu_1 + (V_8 - V_6 + V_4 - V_2), \\ \varphi_4 &= +V_8 \mu_2^4 - V_7 \mu_2^3 - (2V_8 - V_6) \mu_2^2 \\ &\quad + (2V_7 - V_5) \mu_2 + (3V_8 - 2V_6 + V_4), \\ \varphi_2 &= -V_8 \mu_3^2 + V_7 \mu_3 + (3V_8 - V_6). \end{aligned}$$

On sait résoudre φ_2 , et de là, par deux graphiques, on remontera à P_8 .

IV. — ESSAI DE DISCUSSION.

La théorie orthogonale aboutit en définitive à la représentation graphique des racines réelles $\tan \alpha$, $\tan \alpha'$, ... à l'aide de points I_1, I'_1, \dots marquant sur la circonférence de cercle $E_1 E_m$ des arcs $2\alpha, \dots$ comptés à partir de E_1 (*fig. 11*). Si toutes les racines sont

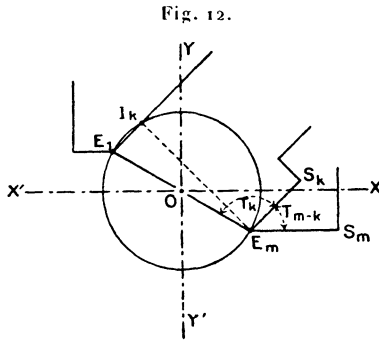
Fig. 11.



réelles on comptera m point I et leur barycentre (qui coïncide avec celui des sommets de l'orthogone, c'est-à-dire avec le point $G_1 : R_1 \frac{\cos A_1}{\sin A_1}$) sera à l'intérieur du cercle. Voilà donc un premier criterium indicatif de la réalité des racines.

Nous pouvons combiner 2 à 2, 3 à 3, ..., k à k

les points I, c'est-à-dire faire les sommes algébriques de k arcs $E_1 I$ pour trouver des points I_k en nombre C_k^m . Si l'on peut déterminer le barycentre de chaque classe de points I, on aura $\frac{m}{2}$ critères ($\frac{m-1}{2}$ si m est impair). On arrive à ce résultat en remarquant (fig. 12) qu'un



point I_k est l'indice de l'existence réelle d'un orthogone S^k , lequel, combiné avec son coexistant S^{m-k} , doit reproduire le proposé S^m .

Les coordonnées, par rapport aux axes de l'orthogone S, pour un point I_k quelconque seront

$$\begin{aligned} x &= R(\cos T_k \cos T_{m-k} + \sin T_k \sin T_{m-k}), \\ y &= R(\cos T_k \sin T_{m-k} - \sin T_k \cos T_{m-k}). \end{aligned}$$

Si l'on suppose les C_k^m abscisses et ordonnées, on trouvera pour leurs sommes tous les produits partiels provenant de la multiplication des deux polynômes S^k et S^{m-k} , c'est-à-dire de l'équation que nous écrivons symboliquement :

$$(V'_k + V'_{k-1} + V'_{k-2} + \dots + V'_0)(V''_{m-k} + V''_{m-k-1} + \dots + V''_0),$$

mais ces produits seront répartis entre $\sum x$ et $\sum y$,

d'après les résultats de la notation

$$(\cos T_{k+1} + \sqrt{-1} \sin T_k) (\cos T_{m-k} - \sqrt{-1} \sin T_{m-k}).$$

De plus, ils devront tous être divisés par 2, $\left(\frac{4R^2}{2R}\right)$.

La question étant posée ainsi, on vérifie sans difficultés que le premier terme de $\sum x$ est :

$$+ \frac{1}{2} C_k^m V_m,$$

le deuxième

$$- \frac{1}{2} \frac{C_2^k + C_1^k C_1^{m-k} - C_2^{m-k}}{C_2^m} C_k^m V_{m-2},$$

et ainsi de suite, et qu'en définitive, si l'on appelle $R_k \frac{\cos}{\sin} A_k$ les coordonnées du point cherché, barycentre des points I_k , on peut écrire, toutes réductions faites, et en attribuant à C_0 la valeur de l'unité :

$$\begin{aligned} \rho R_k \cos A_k &= \sum_{p=0}^{\frac{m}{2} \text{ ou } \frac{m-1}{2}} (-1)^p \frac{C_{2p}^k C_0^{m-k} - C_{2p}^k C_1^{m-k} + \dots + C_0^k C_{2p}^{m-k}}{C_{2p}^m} V_{m-2p}, \\ 2 R_k \sin A_k &= \sum_{p=0}^{\frac{m-1}{2} \text{ ou } \frac{m-2}{2}} (-1)^{p+1} \frac{C_{2p+1}^k C_0^{m-k} - C_{2p+1}^k C_1^{m-k} + \dots + C_0^k C_{2p+1}^{m-k}}{C_{2p+1}^m} V_{m-(2p+1)}. \end{aligned}$$

Dans ces formules, les symboles C^k et C^{m-k} n'ont de signification réelle que si l'indice inférieur, qui marque le nombre des objets combinés, est plus petit que k ou $m - k$, total des disponibles : cela suffit pour indiquer où s'arrête le calcul, dans chaque cas particulier, aux numérateurs.

On peut faire les remarques suivantes :

1° Le numérateur de V_{m-2p} , composé d'un nombre

pair de termes, conserve sa valeur et son signe quand l'on change k en $m - k$; celui de $V_{m-(2p+1)}$ change de signe. Les points G_k et G_{m-k} auront donc même abscisse et des coordonnées de signes contraires; et par suite, si l'on a un point $G_{\frac{m}{2}}$ (m pair), ce point sera sur l'axe des X .

2° Les points G ainsi définis sont en réalité en nombre $m + 1$: car, parmi eux, il faut compter G_0 que nous avons défini antérieurement $R \frac{\cos A}{\sin A}$, et dont on retrouve les formules en faisant ici $k = 0$. C'est le point I_0 de la figure 2; E_1 figure le point G_m . On trouve l'expression de G_1 , en faisant $k = 1$, sous la forme

$${}_2R_1 \cos A_1 = V_m - \frac{m-4}{m} V_{m-4} + \frac{m-8}{m} V_{m-8} - \dots \quad (1),$$

$${}_2R_1 \sin A_1 = \frac{m-2}{m} V_{m-1} - \frac{m-6}{m} V_{m-3} + \dots$$

Il est donc facile de trouver la valeur de R_1 , de R_2 , de R_3 , ..., et il est évident que R_1, R_2, \dots doivent être plus petits que R . Il en résulte que l'on a ainsi $\frac{m}{2}$ (ou $\frac{m-1}{2}$) conditions *nécessaires* pour que l'équation ait toutes ses racines réelles. Sous la forme où elles se présentent ces conditions ne sont pas *suffisantes*, car aussi bien que G_1 , les points G_2, G_3, \dots , tout en étant à l'intérieur du cercle de rayon R , peuvent résulter de

(1) Cette expression peut être identifiée avec celle que nous avons donnée antérieurement, en tenant compte de la valeur de $R \cos A$. Du reste, la fonction $R \cos A$ pourrait être mise en évidence dans $R_k \cos A_k$: il suffit, pour arriver à ce résultat, de remarquer que l'on a identiquement

$$C_0^k C_q^{m-k} + C_1^k C_{q-1}^{m-k} + \dots + C_q^k C_0^{m-k} = C_q^m.$$

la composition de barycentres extérieurs afférents à des orthogones élémentaires irréductibles.

Ne voulant pas allonger cette Note, nous terminons sur le simple énoncé des considérations qui maintenant jalonnent pour nous la route.

Les relations obtenues entre les quantités R , A et V permettent, ne serait-ce que par les procédés connus de résolution d'un système d'équations linéaires, d'exprimer V en fonction de R et A : on le fait plus commodément à l'aide d'un calcul inverse de celui que nous avons présenté et l'on peut ainsi écrire les coefficients sous une forme qui donne des renseignements nouveaux. D'autre part, si l'on se reporte au schéma de la figure 12, on arrive à la conception de points-racines sommets d'un polygone inscrit indépendant du diamètre E_1E_m , lequel, par sa position accidentelle, détermine un polynome algébrique particulier, c'est-à-dire une écriture analytique *passagère* du polygone. Il en résulte pour le polynome lui-même et pour les polygones I_k provenant du primitif I_1 , des variations dont l'étude s'impose.
