Nouvelles annales de mathématiques

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 186-192

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__186_0>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1953.

(1903, p. 46.)

Soient, pour un point M *d'une courbe* (M) *quelconque,* m *et* μ *les centres des deux premières courbures.* MT *étant la tangente en* M *à cette courbe,* Δ *une direction fixe quelconque, on porte des longueurs égales au rayon de courbure* mM *en* mM$_1$ *et* MM$_2$ *sur les parallèles à* Δ *menées par* m *et* M, *en* MM$_3$ *sur la tangente* MT.

Les tangentes en M$_1$, M$_2$, M$_3$ *aux courbes décrites respectivement par ces trois points résultent des théorèmes suivants :*

I. *La tangente en* M$_1$ *passe par* M.

II. *La tangente en* M$_2$ *passe par le point de rencontre de la tangente* MT *et de la perpendiculaire abaissée de* m *sur* Mμ.

III. *La tangente en* M$_3$ *est symétrique de* M$_3\mu$ *par rapport à la tangente* MM$_3$. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par L'AUTEUR.

1. Appelons T$_1$ le point inconnu où la tangente en M$_1$ à la courbe que décrit ce point rencontre mM.

Puisque la direction de mM$_1$ est fixe, si $d(m)$ est la différentielle de l'arc décrit par le point m, on a

$$\frac{d.m\text{M}_1}{d(m)} = \frac{m\text{M}_1}{m\text{T}_1}.$$

Mais, par hypothèse,

$$d.m\text{M}_1 = d.m\text{M},$$

et, d'après un théorème bien connu,

$$d.m\text{M} = d(m).$$

Donc

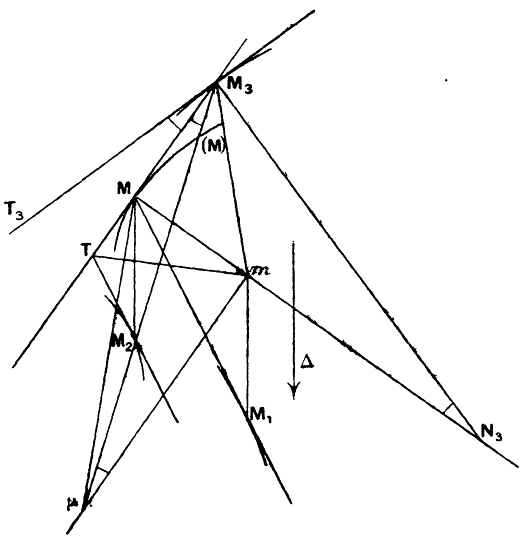
$$mM_1 = mT_1,$$

ou, en tenant compte de l'hypothèse $mM_1 = mM$,

$$mM = mT_1,$$

ce qui montre que le point T_1 coïncide avec le point M.

On peut donc dire que le point M_1 *poursuit* le point M.



II. De même, si la tangente en M_2 coupe la tangente en M au point T, on a, puisque MM_2 est de direction fixe,

$$\frac{d.MM_2}{d(M)} = \frac{MM_2}{MT},$$

ou, en vertu de l'hypothèse $MM_2 = Mm$,

$$\frac{d.Mm}{d(M)} = \frac{Mm}{MT}.$$

Mais, si $d\theta$ est l'angle de contingence en M, on a

$$d.Mm = m\mu.d\theta,$$
$$d(M) = Mm.d\theta.$$

Donc

$$\frac{d.\mathrm{M}m}{d(\mathrm{M})} = \frac{m\mu}{\mathrm{M}m}$$

et

$$\frac{m\mu}{\mathrm{M}m} = \frac{\mathrm{M}m}{\mathrm{MT}}.$$

Cela montre que les triangles rectangles $m\mathrm{M}\mu$ et $\mathrm{TM}m$ sont semblables et, puisque leurs côtés de l'angle droit sont deux à deux perpendiculaires, il en est de même de leurs hypoténuses $\mathrm{M}\mu$ et $m\mathrm{T}$.

III. Si la normale en M_3 à la courbe (M_3) coupe en N_3 la normale en M à la courbe (M) dont l'angle de contingence est $d\theta$, on a

$$d.\mathrm{MM}_3 = m\mathrm{N}_3.d\theta.$$

Mais

$$d.\mathrm{M}m = m\mu.d\theta.$$

Donc

$$m\mathrm{N}_3 = m\mu.$$

Or l'égalité de MM_3 et de $\mathrm{M}m$ entraîne l'égalité des angles que M_3m fait avec MM_3 et $\mathrm{M}m$, donc avec $m\mu$ et $m\mathrm{N}_3$. Il en résulte que les triangles $\mathrm{M}_3m\mathrm{N}_3$ et $\mathrm{M}_3m\mu$ sont égaux, et, par suite, que

$$\widehat{\mathrm{M}_3\mathrm{N}_3m} = \widehat{\mathrm{M}_3\mu m}.$$

Or

$$\widehat{\mathrm{M}_3\mathrm{N}_3m} = \widehat{\mathrm{MM}_3\mathrm{T}_3} \qquad \text{(côtés perpendiculaires)},$$

$$\widehat{\mathrm{M}_3\mu m} = \widehat{\mathrm{MM}_3\mu} \qquad \text{(alternes internes)}.$$

Donc

$$\widehat{\mathrm{MM}_3\mathrm{T}_3} = \widehat{\mathrm{MM}_3\mu}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

1962.

(1903, p. 95.)

Soient

$$\mathrm{A}x^2 + \mathrm{B}y^2 + \mathrm{C}z^2 + 2\mathrm{F}yz + 2\mathrm{G}zx + 2\mathrm{H}xy = 1,$$
$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2fyz + 2gzx + 2hxy = 1$$

les équations de deux quadriques rapportées à un système quelconque d'axes rectangulaires passant par leur centre

commun; on demande de démontrer les propositions suivantes :

1° *Les conditions qui expriment que ces deux quadriques ont les mêmes axes de figure sont*

$$(1)\quad \begin{cases} U = (Hg) + (Bf) + (Fc) = 0, \\ V = (Ga) + (Fh) + (Cg) = 0, \\ W = (Ah) + (Hb) + (Gf) = 0, \end{cases}$$

où l'on a posé

$$Hg - Gh = (Hg), \qquad Bf - Fb = (Bf), \qquad \ldots.$$

2° *La condition qui exprime que le plan ayant pour équation*

$$lx + my + nz = 0$$

coupe les deux quadriques données suivant deux coniques ayant les mêmes axes de figure est

$$(l^2 + m^2 + n^2)(lU + mV + nW) - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA + mH + nG & lH + mB + nF & lG + mF + nC \\ la + mh + ng & lh + mb + nf & lg + mf + nc \end{vmatrix} = 0.$$

Si les axes sont obliques et font entre eux des angles λ, μ *et* ν, *les conditions* (1) *prennent la forme*

$$\begin{aligned} (Hg)\sin^2\lambda + (Bf)\sin^2\mu + (Fc)\sin^2\nu & \\ + (Bc)(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) & \\ + [(Fg) + (Hc)](\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) & \\ + [(Hf) + (Bg)](\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Ga)\sin^2\lambda + (Fh)\sin^2\mu + (Cg)\sin^2\nu & \\ + [(Fg) + (Ch)](\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) & \\ + (Ca)(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) & \\ + [(Gh) + (Fa)](\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (Ah)\sin^2\lambda + (Hb)\sin^2\mu + (Gf)\sin^2\nu & \\ + [(Hf) + (Gb)](\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) & \\ + [(Gh) + (Af)](\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) & \\ + (Ab)(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) &= 0. \end{aligned}$$

(GENTY.)

SOLUTION

Par M. Letierce.

1. Étant données deux quadriques de même centre, on sait qu'il existe un trièdre de diamètres conjugués, commun à ces deux quadriques.

Soit (α, β, γ) un point d'un de ces diamètres, les plans diamétraux conjugués de cette direction par rapport aux deux quadriques sont confondus; ces plans sont

$$x f'_\alpha + y f'_\beta + z f'_\gamma = 0,$$
$$x \varphi'_\alpha + y \varphi'_\beta + z \varphi'_\gamma = 0,$$

$f = 0$ et $\varphi = 0$ étant les équations des quadriques. On doit avoir

$$\frac{f'_\alpha}{\varphi'_\alpha} = \frac{f'_\beta}{\varphi'_\beta} = \frac{f'_\gamma}{\varphi'_\gamma}.$$

Le trièdre conjugué commun est donc défini par les trois droites communes aux trois cônes

$$\frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_y}{\varphi'_y}, \qquad \frac{f'_x}{\varphi'_x} = \frac{f'_z}{\varphi'_z}, \qquad \frac{f'_y}{\varphi'_y} = \frac{f'_z}{\varphi'_z},$$

équations qui s'écrivent, en les développant,

$$\begin{aligned}(\mathrm{A}h)x^2 + (\mathrm{H}b)y^2 + (\mathrm{C}f)z^2 &+ [(\mathrm{G}b) + (\mathrm{H}f)]yz \\ &+ [(\mathrm{G}h) + (\mathrm{A}f)]zx + (\mathrm{A}b)xy = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{G}a)x^2 + (\mathrm{F}h)y^2 + (\mathrm{C}g)z^2 &+ [(\mathrm{F}g) + (\mathrm{C}h)]yz \\ &+ (\mathrm{C}a)zx + [(\mathrm{G}h) + (\mathrm{F}a)]xy = 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathrm{H}g)x^2 + (\mathrm{B}f)y^2 + (\mathrm{F}c)z^2 &+ (\mathrm{B}c)yz \\ &+ [(\mathrm{F}g) + (\mathrm{H}c)]zx + [(\mathrm{B}g) + (\mathrm{H}f)]xy = 0.\end{aligned}$$

Pour que les quadriques aient mêmes axes de figure, il faut et il suffit que ces trois cônes soient capables d'un trièdre trirectangle.

En coordonnées rectangulaires, les conditions sont que les sommes des coefficients de x^2, y^2, z^2 soient nulles; donc

$$\begin{aligned} U &= (Hg) + (Bf) + (Fc) = 0, \\ V &= (Ga) + (Fh) + (Cg) = 0, \\ W &= (Ah) + (Hb) + (Gf) = 0, \end{aligned}$$

et, en coordonnées obliques, elles sont exprimées par les conditions de l'énoncé.

II. Soit $(l', m'. n')$ une direction du plan

$$lx + my + nz = 0, \qquad ll' + mm' + nn' = 0.$$

Les plans diamétraux conjugués de (l', m', n') par rapport aux deux surfaces sont

$$l'f'_x + m'f'_y + n'f'_z = 0, \tag{1}$$

$$l'\varphi'_x + m'\varphi''_y + n'\varphi'_z = 0. \tag{2}$$

Quand (l', m', n) varie en restant dans le plan

$$lx + my + nz = 0,$$

l'intersection de (1) et de (2) décrit le cône

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ f'_x & f'_y & f'_z \\ \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

D'après la définition même de ce cône, le plan

$$lx + my + nz = 0$$

le coupe suivant deux droites qui forment le système de diamètres coujugués commun aux deux coniques d'intersection du plan et deux surfaces.

Pour que ces deux coniques aient mêmes axes, il faut et il suffit que le plan coupe le cône (3) suivant deux droites rectangulaires.

Or on sait que pour que

$$ux + vy + wz = 0$$

coupe le cône

$$F(x, y, z) = Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + \ldots = 0$$

suivant deux droites rectangulaires, il faut que

$$(A + A' + A'')(u^2 + v^2 + w^2) - F(u, v, w) = 0.$$

Appliquant cette formule au cas présent, on obtient la condition

$$0 = (l^2 + m^2 + n^2)(lU + mV + nW) - \begin{vmatrix} l & m & n \\ lA + mH + nG & lH + mB + nF & lG + mF + nC \\ la + mh + ng & lh + mb + nf & lg + mf + nc \end{vmatrix},$$

car les coefficients de x^2, y^2, z^2 sont respectivement

$$l(Hg) + m(Ga) + n(Ah),$$
$$l(Bf) + m(Fh) + n(Hb),$$
$$l(Fc) + m(Cg) + n(Gf).$$

C. Q. F. D.