NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Certificats de calcul différentiel et intégral

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 181-185
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__181_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

CERTIFICATS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL.

Bordeaux.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Les deux nombres* ω *et* ω' *ont un rapport imaginaire. Pour quelles valeurs du nombre entier* p *la série*

$$\sum\sum\frac{1}{(m\omega+n\omega')^p}$$

sera-t-elle absolument convergente?

La sommation $\sum\sum$ *s'étend à toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles des nombres* m *et* n, *excepté* $m=n=0$.

Définir les fonctions $\wp u$, ζu, σu.

II. *On donne en coordonnées cartésiennes rectangulaires planes de cercle*

$$x^2+y^2=R^2 \tag{1}$$

et la parabole

$$(2) \qquad x^2 = 2py.$$

Par un point quelconque M *du plan on mène une tangente* MP *au cercle* (1), P *désignant le point de contact. Le rayon du cercle qui passe par* P *rencontre en* Q *la parabole* (2).

Déterminer une courbe Γ *telle que la normale en tout point* M *de cette courbe passe par le point* Q.

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Appliquer le théorème des résidus au calcul de l'intégrale*

$$\int_C (a + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3)\left(e^{\frac{1}{z}} + e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-2}}\right) dz$$

prise le long d'un cercle C *de rayon*

$$R > 1 \quad \text{et} \quad < 2 \qquad (1 < R < 2),$$

a_0, a_1, a_2, a_3 *désignant quatre constantes.*

II. *On pose*

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + x + 1)(3x^2 + x + 1)}}.$$

Calculer x *en fonction de* u, *en employant les fonctions* sn, cn. (Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *On considère l'intégrale*

$$\int \frac{dz}{\sqrt{z(1-2)}}$$

et l'on demande :

1° *La valeur de cette intégrale prise le long d'un cercle de rayon très grand ayant l'origine pour centre ;*

2° *La valeur de l'intégrale prise le long de cercles infiniment petits entourant les points* $z = 0$, $z = 1$;

3° *La valeur de l'intégrale réelle*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x}} ;$$

4° *D'étudier les différentes valeurs de l'intégrale*

$$\int_{z_0}^{z_1} \frac{dz}{\sqrt{z(1-z)}}$$

lorsque le chemin d'intégration allant de z_0 *à* z_1 *varie de toutes les façons possibles.*

II. *Trouver, dans un plan, une courbe* C *telle que la distance de l'origine des coordonnées à la tangente en un point* M *de la courbe* C *soit proportionnelle à l'abscisse de ce point.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On sait que l'égalité*

$$(1) \qquad u = \int_{\infty}^{z} \frac{dz}{\sqrt{z^4+1}}$$

définit z *comme fonction uniforme et méromorphe de* u. *Soit*

$$z = f(u).$$

Au voisinage de la valeur $u = 0$, *le développement de* $f(u)$ *est de la forme suivante :*

$$f(u) = \frac{A}{u} + B_0 + B_1 u + B_2 u^2 + B_3 u^3 + \ldots.$$

On demande de calculer les coefficients A, B_0, B_1, B_2, ... *jusqu'à* B_8 *inclusivement.*

On supposera que dans l'intégrale (1) *la détermination initiale du radical pour* $z = \infty$ *est telle que le rapport*

$$\frac{\sqrt{z^4+1}}{z^2} = 1$$

pour z *infini.*

NOTA. — *En faisant le changement de variable* $z = \frac{1}{t}$, *on cherchera d'abord le développement de* $A = \frac{1}{f(u)}$ *en série de Mac Laurin; soit*

$$A = + \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots$$

et l'on cherchera ensuite le développement de

$$\frac{1}{\alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \alpha_3 u^3 + \ldots}.$$

(Novembre 1904.)

Montpellier.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Déterminer une courbe plane telle que le rayon de courbure soit égal à quatre fois la longueur de la portion de normale limitée à l'axe* OX.

On étudiera séparément deux cas, suivant le sens du rayon de courbure par rapport à cette portion de normale.

Dans chaque cas :

1° *Étudier la forme de la courbe et former ses équations au moyen d'un paramètre variable;*

2° *Calculer la longueur d'un arc de courbe;*

3° *Calculer l'aire comprise entre la courbe, l'axe* Ox, *l'axe* Oy *convenablement choisi, et une normale quelconque;*

4° *Chercher la relation qui existe entre le rayon de courbure et l'ordonnée.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *On donne (en coordonnées rectangulaires) l'ellipsoïde*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2 = 0$$

et le paraboloïde

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - \frac{x}{a} = 0.$$

Trouver le volume du solide commun.

(Novembre 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Construire les courbes qui, rapportées à deux axes de coordonnées* Ox, Oy, *vérifient l'équation différentielle*

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - e^{2y} = 0.$$

II. *On considère l'équation aux dérivées partielles*

$$2yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} + xy = 0.$$

1° *Trouver son intégrale générale;*

2° *Déterminer la surface* S *qui, rapportée à trois axes de coordonnées rectangulaires* Ox, Oy, Oz, *vérifie cette équation aux dérivées partielles et passe par le cercle défini par les équations*

$$z = 0. \qquad x^2 + y^2 - y = 0;$$

3° *Déterminer les lignes de courbure de cette surface* S.

Épreuve pratique. — *Calculer l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-a}{(x^2+a^2)^2}\cos x\,dx,$$

dans laquelle a *désigne un nombre donné.*

(Novembre 1904.)

Grenoble.

Épreuve écrite. — *Une courbe* S, *tracée sur un cône de révolution, rencontre les génératrices de ce cône sous un angle constant. Trouver le lieu* S_1 *des centres de courbure de* S.

On démontrera :

1° *Que les tangentes aux courbes* S *et* S_1 *aux points correspondants sont rectangulaires;*

2° *Que la courbe* S_1 *est située sur un cône de révolution dont elle coupe les génératrices sous un angle constant.*

Épreuve pratique. — *Trouver l'équation générale des surfaces qui sont telles que le plan tangent en l'un quelconque* M *de ses points détermine sur* Oz, *à partir de l'origine* O, *un segment qui soit dans un rapport constant avec la distance du point* M *à l'origine.*

Déterminer une surface intégrale particulière qui passe par une hélice circulaire donnée ayant Oz *pour axe.*

(Novembre 1904.)