

Correspondance

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5 (1905), p. 179-181

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__179_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CORRESPONDANCE.

M. Camille Massing. — Le théorème bien connu de *Steiner*, à savoir que *le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice*, peut être complété de la façon suivante :

Si les normales aux trois points de tangence concourent en un même point M, le point de concours des hauteurs

est le point de rencontre de la directrice et du diamètre de la parabole qui passe par ce point M.

En effet, soient N, N', N'' les trois sommets du triangle normal circonscrit correspondant au point M; α et β les coordonnées du sommet N. On voit facilement que l'ordonnée du point de contact du côté N'N'' est -2β . L'équation de ce côté est alors

$$px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0.$$

Les coordonnées du sommet N' seront

$$x' = \frac{\beta}{p} (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}),$$

$$y' = -\frac{1}{2} (\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha});$$

l'équation du côté opposé NN'' sera

$$(\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha} - \beta)x + 2\alpha y - \alpha(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}) = 0.$$

Ceci posé, il suffit d'écrire les équations des perpendiculaires abaissées des sommets N et N' sur les côtés opposés et de faire dans ces équations $x = -\frac{p}{2}$. On trouve

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p} = y_1,$$

car y_1 (ordonnée du point M) est, en vertu des formules de Desboves, égal à $-\frac{2\alpha\beta}{p}$.

Cette démonstration est *indépendante* de celle du théorème de Steiner.

Si l'on admettait le théorème de Steiner comme démontré, la démonstration se ferait en quelques lignes comme il suit :

L'équation de la perpendiculaire abaissée du sommet N(α, β) du triangle normal circonscrit correspondant au point M(x_1, y_1) sur le côté opposé à N (représenté lui-même par l'équation $px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0$) est

$$(1) \quad \frac{x - \alpha}{p} = \frac{y - \beta}{2\beta}.$$

(181)

Le diamètre (de la parabole) passant par le point $M(x_1, y_1)$ est représenté par l'équation

$$(2) \quad y + \frac{2\alpha\beta}{p} = 0$$

(en vertu des formules de Salmon-Desboves).

Éliminant y entre (1) et (2), on voit que l'abscisse du point de rencontre de ce diamètre (2) et de la hauteur représentée par l'équation (1) est

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Donc, le diamètre (de la parabole) qui passe par le point $M(x_1, y_1)$ (point d'émission des trois sommets) passe par le point de rencontre d'une des hauteurs et de la directrice et par conséquent par le point de rencontre des trois hauteurs.