# Correspondance

*Nouvelles annales de mathématiques 4e série*, tome 5 (1905), p. 179-181

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__179_1>

## CORRESPONDANCE.

M. **Camille Massing**. — Le théorème bien connu de *Steiner*, à savoir que *le point de concours des hauteurs d'un triangle circonscrit à une parabole est sur la directrice*, peut être complété de la façon suivante :

*Si les normales aux trois points de tangence concourent en un même point* M, *le point de concours des hauteurs*

***est le point de rencontre de la directrice et du diamètre de la parabole qui passe par ce point*** **M.**

En effet, soient N, N', N'' les trois sommets du triangle normal circonscrit correspondant au point M; $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du sommet N. On voit facilement que l'ordonnée du point de contact du côté N'N'' est $-2\beta$. L'équation de ce côté est alors

$$px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0.$$

Les coordonnées du sommet N' seront

$$x' = \frac{\beta}{p}(-\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}),$$
$$y' = -\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha});$$

l'équation du côté opposé NN'' sera

$$(\sqrt{\beta^2 - 2p\alpha} - \beta)x + 2\alpha y - \alpha(\beta + \sqrt{\beta^2 - 2p\alpha}) = 0.$$

Ceci posé, il suffit d'écrire les équations des perpendiculaires abaissées des sommets N et N' sur les côtés opposés et de faire dans ces équations $x = -\frac{p}{2}$. On trouve

$$y = -\frac{2\alpha\beta}{p} = y_1,$$

car $y_1$ (ordonnée du point M) est, en vertu des formules de Desboves, égal à $-\frac{2\alpha\beta}{p}$.

Cette démonstration est *indépendante* de celle du théorème de Steiner.

*Si l'on admettait le théorème de Steiner comme démontré,* la démonstration se ferait en quelques lignes comme il suit :

L'équation de la perpendiculaire abaissée du sommet N($\alpha$, $\beta$) du triangle normal circonscrit correspondant au point M($x_1, y_1$) sur le côté opposé à N (représenté lui-même par l'équation $px + 2\beta y + 2\beta^2 = 0$) est

$$(1) \qquad \frac{x - \alpha}{p} = \frac{y - \beta}{2\beta}.$$

Le diamètre (de la parabole) passant par le point $M(x_1, y_1)$ est représenté par l'équation

$$y + \frac{2\alpha\beta}{p} = 0 \tag{2}$$

(en vertu des formules de Salmon-Desboves).

Éliminant $y$ entre (1) et (2), on voit que l'abscisse du point de rencontre de ce diamètre (2) et de la hauteur représentée par l'équation (1) est

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Donc, le diamètre (de la parabole) qui passe par le point $M(x_1, y_1)$ (point d'émission des trois sommets) passe par le point de rencontre d'une des hauteurs et de la directrice et par conséquent par le point de rencontre des trois hauteurs.