

MATHY

**Résistance de l'ellipsoïde immergé dans un fluide parfait incompressible. Intégration des formules. Expression des valeurs approchées. Cas du disque plat et de l'aiguille**

*Nouvelles annales de mathématiques 4<sup>e</sup> série*, tome 5 (1905), p. 170-176

[http://www.numdam.org/item?id=NAM\\_1905\\_4\\_5\\_\\_170\\_1](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__170_1)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

---

---

[S1 a]

**RÉSISTANCE DE L'ELLIPSOÏDE IMMERGÉ DANS UN FLUIDE  
PARFAIT INCOMPRESSIBLE. INTÉGRATION DES FORMULES.  
EXPRESSION DES VALEURS APPROCHÉES. CAS DU DISQUE  
PLAT ET DE L'AIGUILLE;**

PAR M. MATHY.

---

On sait que la résistance d'un corps immergé dans un fluide parfait incompressible est le produit de trois facteurs : le premier dépend de la forme du corps ; le deuxième est la masse du fluide ayant un volume égal à celui du corps ; le troisième est la différence d'accélération du fluide et du corps.

La détermination du premier facteur donne lieu à de

sérieuses difficultés; sa valeur pour l'ellipsoïde n'est exprimée dans les auteurs que sous forme d'intégrale; je me propose de rechercher cette expression à l'aide des fonctions elliptiques et de montrer que, dans le cas où les limites d'intégration ne sont pas des demi-périodes, les valeurs approchées sont encore applicables à la pratique de la même façon que les fonctions circulaires.

Soient  $a, b, c$  les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde,  $a > b > c$ ; le premier facteur  $\mathbf{a}_1$  de sa résistance suivant l'axe des  $x$  est

$$(1) \quad \mathbf{a}_1 = \frac{\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}}{\frac{2}{abc} - \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}}.$$

Les valeurs des deux autres coefficients  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{c}_1$  se déduisent de (1) par la permutation des lettres  $a$  et  $b$  ou  $a$  et  $c$ .

La question est ramenée à trouver la valeur de

$$(2) \quad X = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2 + \lambda) \sqrt{(a^2 + \lambda)(b^2 + \lambda)(c^2 + \lambda)}}.$$

A cet effet, on pose

$$(3) \quad \begin{cases} \lambda = z - \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2), \\ e_1 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 - 2c^2), \\ e_2 = \frac{1}{3}(a^2 + c^2 - 2b^2), \\ e_3 = \frac{1}{3}(b^2 + c^2 - 2a^2). \end{cases}$$

L'expression (2) peut alors s'écrire

$$(4) \quad X = \int_{\frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}^\infty \frac{dz}{(z - e_3) \sqrt{(z - e_1)(z - e_2)(z - e_3)}}.$$

Or, si  $z = p\nu$ , les limites d'intégration seront  $p\nu = \infty$  et

$$(5) \quad p\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

De ce que

$$p'\nu = -2\sqrt{(p\nu - e_1)(p\nu - e_2)(p\nu - e_3)}$$

on a

$$(6) \quad X = \int \frac{-2 d\nu}{p\nu - e_3}.$$

Mais on sait que

$$p(\nu + \omega_3) - e_3 = \frac{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)}{p\nu - e_3};$$

il en résulte que

$$(7) \quad X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} \int [e_3 - p(\nu + \omega_3)] d\nu.$$

Par intégration

$$X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [e_3\nu + \zeta(\nu + \omega_3)]_{p\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}^{p\nu = \infty}.$$

Mais  $p\nu = \infty$  fournit  $\nu = 0$ , d'où

$$(8) \quad X = \frac{2}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)} [\eta_3 - e_3\nu - \zeta(\nu + \omega_3)]_{p\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)}.$$

On développe  $\zeta(\nu + \omega_3)$  et l'on remplace les différences  $e_3 - e_2$ ,  $e_3 - e_1$  par leurs valeurs déduites de (3), et l'on obtient

$$(9) \quad X = \frac{-2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left( e_3\nu + \zeta\nu + \frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p\nu - e_3} \right).$$

On aurait de même

$$Y = \frac{-2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \left( e_2\nu + \zeta\nu + \frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p\nu - e_2} \right),$$

$$Z = \frac{-2}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \left( e_1\nu + \zeta\nu + \frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p\nu - e_1} \right).$$

L'argument  $\nu$  est déterminé par  $p\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$ .  
On remarque qu'il est réel et compris entre 0 et  $\omega$ ;  
car :

$$1^{\circ} \text{ Le module } k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} < 1;$$

2<sup>o</sup>  $p\nu = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$  est plus grand que  $e_1$   
ou  $\frac{1}{3}(a^2 + b^2 - c^2)$ .

D'un autre côté, on obtient les trois fractions  $\frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p\nu - e_3}$ ,  
 $\frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p\nu - e_2}$ ,  $\frac{1}{2} \frac{p'\nu}{p\nu - e_1}$  à l'aide de (3) et (5); elles sont  
égales à  $-\frac{bc}{a}$ ,  $-\frac{ca}{b}$ ,  $-\frac{ab}{c}$ .

En remplaçant dans (1) X par sa valeur (9), on  
trouve  $\mathbf{a}_1$ ; on détermine de même  $\mathbf{b}_1$  et  $\mathbf{c}_1$  à l'aide  
de Y et Z.

*Expression des valeurs approchées.* — Au lieu  
de  $\zeta(\nu)$ , on prend son terme principal  $\frac{1}{\nu}$  et l'on a

$$(9') \quad X = \frac{2}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \left( \frac{bc}{a} - e_3\nu - \frac{1}{\nu} \right).$$

Il reste à calculer  $\nu$ ; on sait qu'il faut tenir compte  
du signe de  $e_2$  ou de  $a^2 + c^2 - 2b^2$ .

*Premier cas :  $e^2 < 0$ .* — La demi-période K se cal-  
cule à l'aide des Tables de Legendre; on sait que

$$k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}.$$

On remarque que

$$k'^2 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

Dès lors, on obtient  $\nu$  par la forme circulaire

$$\cos \frac{\pi}{K} \sqrt{a^2 - c^2} \cdot \nu = \frac{s}{q},$$

avec

$$q = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} - \sqrt[4]{e_1 - e_2}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} + \sqrt[4]{e_1 - e_2}} = \frac{1}{2} \frac{1 - k'^{\frac{1}{2}}}{1 + k'^{\frac{1}{2}}},$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sqrt{p u - e_2} - \sqrt[4]{e_1 - e_2} \sqrt{p u_1 - e_3}}{\sqrt[4]{e_1 - e_3} \sqrt{p u - e_2} + \sqrt[4]{e_1 - e_2} \sqrt{p u_1 - e_3}} = \frac{1}{2} \frac{b - a k'^{\frac{1}{2}}}{b + a k'^{\frac{1}{2}}}.$$

D'où

$$(10) \quad v = \frac{K}{\pi \sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arc.} \cos \frac{(b - a k'^{\frac{1}{2}})(1 + k'^{\frac{1}{2}})}{(b + a k'^{\frac{1}{2}})(1 - k'^{\frac{1}{2}})}.$$

*Second cas* :  $e_2 > 0$ . — Les formules précédentes s'appliquent avec changement de  $e_1, e_2, e_3, p, K, \cos$  en  $-e_3, -e_2, -e_1, -p, K', \cos \operatorname{hyp}$ . Or  $K'$  se calcule encore par les Tables de Legendre; à l'aide de

$$k'^2 = \sin^2 \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}.$$

On en déduit

$$(11) \quad v = \frac{K'}{\pi \sqrt{a^2 - c^2}} \operatorname{arc.} \cos \operatorname{hyp} \frac{(b - c k'^{\frac{1}{2}})(1 + k'^{\frac{1}{2}})}{(b + c k'^{\frac{1}{2}})(1 - k'^{\frac{1}{2}})}.$$

Les formules (9'), (10) et (11) fournissent donc le moyen de calculer  $X$ ; pour obtenir  $Y$  et  $Z$ , il faut considérer

$$\left( \frac{ac}{b} - e_2 v - \frac{1}{v} \right) \quad \text{et} \quad \left( \frac{ab}{c} - e_1 v - \frac{1}{v} \right),$$

$v$  a la précédente valeur (10) ou (11).

*Ellipsoïde de révolution aplati. Disque circulaire plat.* — Lorsque  $a = b, k^2 = 0$  et les fonctions elliptiques dégèrent en fonctions circulaires.  $X$  et  $Y$  prennent la forme  $\frac{0}{0}$  et il faut leur appliquer la règle

élémentaire de la dérivation. Quant à  $Z_1$  les formules de dégénérescence conduisent successivement à

$$(12) \quad \begin{cases} Z = \frac{2}{(a^2 - c^2)^2} \left( \frac{a^2}{c} - \frac{3e_1}{2} \nu - c \right) \\ = \frac{2}{(a^2 - c^2)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} - \text{arc sin } \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right). \end{cases}$$

Pour le disque circulaire plat,  $c$  étant très petit par rapport à  $a$ ,  $a^2 - c^2$  tend vers  $a^2$ ; d'où

$$(13) \quad Z = \frac{2}{a^3} \left( \frac{a}{c} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Dès lors

$$(14) \quad c_1 = \frac{\frac{2}{a^3} \left( \frac{a}{c} - \frac{\pi}{2} \right)}{\frac{2}{a^2 c} - \frac{2}{a^2 c} + \frac{\pi}{a^3}} = \frac{2}{\pi} \left( \frac{a}{c} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Le rapport  $\frac{a}{c}$  est très grand; mais le second facteur de la résistance devient très petit, puisque c'est la masse du fluide ayant le volume du disque; on prend le rapport du produit de ces deux facteurs au produit des deux facteurs relatifs à la sphère de même rayon que le disque; le premier facteur est  $\frac{4}{2}$ , on a ainsi

$$(15) \quad \frac{R_z \text{ du disque } a}{R_z \text{ de la sphère } a} = \frac{\frac{2}{\pi} \left( \frac{a}{c} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{4}{3} \pi a^2 c}{\frac{1}{2} \frac{4}{3} \pi a^3} = \frac{4}{\pi} \frac{a - c \frac{\pi}{2}}{a}.$$

Ce rapport tend vers  $\frac{4}{\pi}$  avec  $c$  tendant vers 0. D'où, si  $R_x = R_y = 0$ , c'est-à-dire si le disque se meut perpendiculairement à son plan, sa résistance se réduit à (15).

*Ellipsoïde de révolution allongé. Double aiguille.*  
— Dans ce cas,  $b^2 = c^2$ ,  $k^2 = 1$  et il y a dégénérescence

des fonctions elliptiques en fonctions hyperboliques.

Y et Z prennent la forme  $\frac{0}{0}$ .

Quant à X, on a

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{2}{(a^2 - c^2)^2} \left( \frac{c^2}{a} - \frac{3e_3}{2} v - a \right) \\ &= \frac{2}{(a^2 - c^2)^2} \left( \log \frac{a + \sqrt{a^2 - c^2}}{c} - \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a} \right). \end{aligned} \right.$$

Pour la double aiguille,  $c$  est très petit,  $a^2 - c^2$  tend vers  $a^2$ , d'où

$$(17) \quad X = \frac{2}{a^3} \left( \log \frac{2a}{c} - 1 \right)$$

et

$$(18) \quad a_1 = \frac{\frac{2}{a^3} \log \frac{2a}{c} - \frac{2}{a^3}}{\frac{2}{ac^2} + \frac{2}{a^3} - \frac{2}{a^3} \log \frac{2a}{c}} + \frac{\log \frac{2a}{c} - 1}{\left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\log \frac{2a}{c} - 1\right)},$$

$a_1$  tend vers 0 avec  $c$ ; comme le volume est très petit, on peut dire que  $R_x = 0$ .