NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

EDWIN BIDWELL WILSON

Sur le groupe qui laisse invariante l'aire gauche

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 163-170

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__163_1>

[J4f]

SUR LE GROUPE QUI LAISSE INVARIANTE L'AIRE GAUCHE;

PAR M. EDWIN BIDWELL WILSON.

M. Fréchet a récemment appelé l'attention sur une généralisation de la notion d'aire due à MM. Peano et Laisant, et il en a montré les relations avec la notion ordinaire d'aire et avec le calcul fonctionnel ([1]).

J'avais déjà donné une tout autre généralisation en remarquant que l'on pourrait définir l'aire d'une façon quasi-projective et sans faire mention de la longueur des lignes. J'ai fait usage de cette généralisation pour

([1]) *Sur une généralisation des notions d'aire et de plan* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* juin 1904).

établir des théorèmes dans la théorie des groupes projectifs du plan qui laissent l'aire invariante [1].

On sait, d'ailleurs, que les transformations du plan qui conservent l'aire ne sont nullement contenues dans le groupe projectif, mais qu'elles forment un groupe infini, à savoir le groupe des mouvements à deux dimensions d'un liquide incompressible, dont l'équation caractéristique est

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} = 0 \quad [2].$$

Je me propose, dans cette Note, de déterminer le groupe de l'espace qui laisse invariante l'aire gauche de M. Peano. Je ne me bornerai nullement au groupe projectif; je considérerai le groupe le plus général dont les transformations puissent se synthétiser de transformations infiniment petites. Nous trouverons à la fin que le groupe cherché n'est autre que celui des mouvements rigides, c'est-à-dire des déplacements euclidiens. Voilà un résultat qui pourrait sembler assez surprenant vu la grande généralité du groupe plan qui laisse invariante l'aire au sens ordinaire. Bien que ce problème soit simple et qu'il ait dû être résolu auparavant, je n'en puis trouver aucune mention. Toutefois, la méthode que je vais suivre pourrait avoir quelque intérêt et plus ou moins de nouveauté.

1. Remarquons d'abord que, puisque l'aire gauche

---

[1] *Ueber eine von dem Begriff der Länge unabhängige Definition des Volumens* (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 1903, p. 555-561), et *A generalised conception of area : applications to collineations in the plane* (*Annals of Mathematics*, 1903, p. 19-45).

[2] *Voir*, par exemple, Sophus Lie, *Vorlesungen über Differentialgleichungen*, 1891, p. 82-85.

jouit des propriétés I′-IV′ [1], il suffit de se borner aux aires infiniment petites, c'est-à-dire aux aires planes infinitésimales (avec lesquelles on peut ensuite construire les aires gauches finies par un procédé de sommation). Puis, ce n'est pas l'aire vectorielle **S** qu'il faudrait conserver, mais sa valeur scalaire $\sqrt{\mathbf{S}.\mathbf{S}}$. Si l'on voulait conserver la direction de **S**, on se limiterait forcément aux translations, de même que si l'on eût voulu conserver la longueur et la direction des lignes.

Quant aux calculs mêmes qui entrent dans la solution du problème, ils sont assez longs, et il y aura grand avantage à les abréger par l'introduction de l'analyse vectorielle. Je suivrai les notations de Gibbs, dont M. Genty a si heureusement fait usage dans un Mémoire sur les systèmes triples orthogonaux publié il y a peu de temps dans le *Bulletin de la Société mathématique de France*. Pour les détails du calcul vectoriel, je renverrai le lecteur au Traité [2]. (Je citerai les pages de ce Traité.)

Soit Uf une transformation infinitésimale du groupe dont il est question :

$$Uf = \xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Introduisons le vecteur

$$\mathbf{L} = \xi\mathbf{i} + \eta\mathbf{j} + \zeta\mathbf{k};$$

d'où

$$Uf = \mathbf{L}.\nabla f.$$

Soient $\mathbf{r}$ et $\mathbf{r}'$ les vecteurs de deux points de l'espace, soient $\mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r}'_1$ leurs transformés par Uf. De la défini-

(1) *Voir* Fréchet, *loc. cit.*

(2) *Voir* Gibbs-Wilson, *Vector Analysis* (New-York, 1901).

tion même du symbole $U f$, on tire

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + \mathbf{L}\,\delta t + \ldots, \tag{1}$$

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}' + \mathbf{L}'\,\delta t + \ldots. \tag{2}$$

Supposons que $\mathbf{r}'$ soit de la forme $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$; développons $\mathbf{L}'$ suivant les puissances de $d\mathbf{r}$ en nous rappelant que (p. 404)

$$d\mathbf{L} = d\mathbf{r}.\nabla\mathbf{L}.$$

Alors (2) devient

$$\mathbf{r}'_1 = \mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{L}\,\delta t + d\mathbf{r}.\nabla\mathbf{L}\,\delta t, \tag{2'}$$

en écartant les termes d'ordre supérieur en δt et en $d\mathbf{r}$. Retranchons (1) de (2′), d'où il s'ensuit que

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r} + d\mathbf{r}.\nabla\mathbf{L}\,\delta t = d\mathbf{r}.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t).$$

Cette expression nous donne la relation entre l'élément linéaire $d\mathbf{r}$ et son transformé $d\mathbf{r}_1$. Le polynome dyadique

$$\Phi = \mathrm{I} + \nabla\mathbf{L},$$

où I représente l'idemfacteur (p. 288), est celui qui transforme les éléments linéaires. Gibbs a donné une théorie de la multiplication double qui est particulièrement utile pour la discussion des transformations d'aire et de volume (p. 306-315 et 333-334). Le point principal est que l'on peut opérer algébriquement sur des dyadiques presque comme s'ils étaient des nombres.

Soient, en effet, $d\mathbf{S}$ et $d\mathbf{S}_1$ l'élément d'aire et son transformé, $d\tau$ et $d\tau_1$ ceux du volume. Si l'on a

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.\Phi,$$

on a également (*loc. cit.*)

$$d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}.\Phi_2, \qquad \Phi_2 = \tfrac{1}{2}\,\Phi \underset{\times}{\times} \Phi,$$

$$d\tau_1 = d\tau\,\Phi_3, \qquad \Phi_3 = \tfrac{1}{3}\,\Phi_2 : \Phi.$$

2. Appliquons maintenant cette théorie au cas actuel (p. 295) :

$$d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t) = (\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}}\,\delta t).d\mathbf{r};$$

d'où vient

$$d\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t).(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}}\,\delta t).d\mathbf{r}.$$

Développons en négligeant les carrés de δt :

$$d\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.\mathrm{I}.d\mathbf{r} + d\mathbf{r}.(\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}}).d\mathbf{r}\,\delta t.$$

La condition, pour que la longueur se conserve, est évidemment

$$d\mathbf{r}_1.d\mathbf{r}_1 = d\mathbf{r}.d\mathbf{r};$$

d'où

$$d\mathbf{r}.(\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}}).d\mathbf{r} = 0,$$

et cela pour tous les vecteurs $d\mathbf{r}$, ce qui entraîne la nullité identique du dyadique (p. 284-286). Ainsi nous avons

$$\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}} = 0.$$

D'autre part, on a, pour régir les transformations d'aires,

$$d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t)_2 = (\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t)_{2\mathrm{C}}.d\mathbf{S};$$

d'où

$$d\mathbf{S}_1.d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S}.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t)_2.(\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t)_{2\mathrm{C}}.d\mathbf{S}.$$

Rappelons la formule (p. 331)

$$(\Phi + \Psi)_2 = \Phi_2 + \Phi \overset{\times}{\times} \Psi + \Psi_2$$

et (p. 313)

$$\mathrm{I}_2 = \mathrm{I};$$

développons toujours en écartant les puissances supérieures de δt, et nous aurons

$$\begin{aligned} d\mathbf{V}_1.d\mathbf{S}_1 &= d\mathbf{S}.(\mathrm{I} + \mathrm{I} \overset{\times}{\times} \nabla\mathbf{L}\,\delta t).(\mathrm{I} + \mathrm{I} \overset{\times}{\times} \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}}\,\delta t).d\mathbf{S} \\ &= d\mathbf{S}.\mathrm{I}.d\mathbf{S} + d\mathbf{S}.\mathrm{I} \overset{\times}{\times} (\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_{\mathrm{C}}).d\mathbf{S}\,\delta t. \end{aligned}$$

Si, maintenant, l'aire ne doit pas changer de valeur,

$$d\mathbf{S}_1 . d\mathbf{S}_1 = d\mathbf{S} . d\mathbf{S}$$

et

$$d\mathbf{S} . \mathrm{I} \underset{\times}{\times} (\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C) . d\mathbf{S} = 0.$$

Cette équation a lieu pour n'importe quelles valeurs du vecteur $d\mathbf{S}$. Ainsi

$$\mathrm{I} \underset{\times}{\times} (\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C) = 0;$$

d'où, en divisant par le dyadique non nul I,

$$\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C = 0.$$

On voit qu'on retombe sur la même condition qu'auparavant. Le théorème que le groupe qui laisse invariante l'aire au sens de M. Peano n'est autre que celui qui laisse invariantes les longueurs des lignes, soit le groupe de déplacements euclidiens, se trouve donc démontré.

Si l'on voulait trouver la condition pour que le volume ne change pas, il n'y aurait qu'à écrire

$$\mathrm{I} = (\mathrm{I} + \nabla\mathbf{L}\,\delta t)_3 = \mathrm{I}_3 + \mathrm{I}_2 : \nabla\mathbf{L}\,\delta t;$$

d'où, en remarquant que $\mathrm{I}_3 = \mathrm{I}$ et $\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}$,

$$\mathrm{I} : \nabla\mathbf{L} = \nabla\mathbf{L}_S = \nabla . \mathbf{L} = 0.$$

Cette condition est bien connue. Elle exprime tout simplement le fait que la divergence de **L** doit être nulle.

3. Exprimons la condition $\nabla\mathbf{L} + \nabla\mathbf{L}_C = 0$ sous une forme plus familière :

$$\begin{aligned}\nabla = \quad & \mathbf{ii}\frac{\partial\xi}{\partial x} + \mathbf{ij}\frac{\partial\eta}{\partial x} + \mathbf{ik}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\\ & + \mathbf{ij}\frac{\partial\xi}{\partial y} + \mathbf{jj}\frac{\partial\eta}{} + \mathbf{jk}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\\ & + \mathbf{ki}\frac{\partial\xi}{\partial z} + \mathbf{kj}\frac{\partial\eta}{\partial z} + \mathbf{kk}\frac{\partial\zeta}{\partial z}.\end{aligned}$$

L'équation $\nabla L + \nabla L_C = 0$ nous montre que le déterminant des neuf dérivées partielles est un déterminant gauche. C'est-à-dire que l'on a

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0.$$

Ces six expressions qui sont identiquement nulles sont précisément les six fonctions caractéristiques bien connues de la déformation homogène osculatrice à la transformation Uf. Dans ces conditions, M. Appell a montré que la transformation n'est autre qu'un déplacement [1].

Ainsi notre problème a été complètement résolu et mis en harmonie avec la théorie de l'élasticité.

On pourrait demander la généralisation aux dimensions supérieures, laquelle est fort simple. A quatre dimensions on aura, par exemple, l'aire plane, l'aire gauche et l'aire doublement gauche, pour ainsi dire. On aura aussi le volume ordinaire à trois dimensions et le volume gauche; puis le volume à quatre dimensions. Et ainsi de suite pour des espaces à dimensions plus élevées. L'analyse qui sert à résoudre le problème est la même que pour trois dimensions.

Le théorème fondamental est celui-ci :

Dans l'espace à n dimensions, le groupe qui laisse invariants ou la longueur, ou l'aire (généralisée), ou le volume (généralisé) de trois jusqu'à $n - 1$ dimen-

---

[1] *Voir* son *Traité de Mécanique rationnelle,* t. III, p. 265-266, où les six équations aux dérivées partielles sont intégrées par voie directe.

sions est toujours le groupe des déplacements euclidiens.

Les conditions analytiques sont

$$\nabla \mathbf{L} + \nabla \mathbf{L}_C = 0$$

ou

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \lambda_j}{\partial x_i} = 0 \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n),$$

si Uf s'écrit

$$Uf = \lambda_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f}{\partial x_2} + \ldots + \lambda_n \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Au contrarie, le groupe qui laisse invariant le volume à n dimensions est infini et régi par l'équation

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_n} = 0.$$