Nouvelles annales de mathématiques

A. Tresse

Sur l'équilibre du corps solide

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 153-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__153_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

[R4a]

SUR L'ÉQUILIBRE DU CORPS SOLIDE;

Par M. A. TRESSE.

Le nouveau programme de Mécanique de la classe de Mathématiques spéciales place au début de la Statique du corps solide l'étude des six conditions nécessaires d'équilibre, indépendantes des forces intérieures, qui s'appliquent à tout système de points matériels, deformable ou non. Il s'agit ensuite de démontrer que, pour les systèmes invariables, ces conditions sont suffisantes. C'est cette démonstration que nous voulons établir ici par une méthode que nous croyons nouvelle et qui met en évidence un cas d'exception intéressant, sinon curieux, celui des corps solides plans sans épaisseur. Auparavant, nous rappellerons d'une façon sommaire comment on arrive aux conditions nécessaires en renvoyant sur ce point à un article, d'une inspiration très heureuse, de M. Gouilly, dans L'Enseignement mathématique (¹).

1. Soit d'abord *un seul point matériel,* A, soumis à l'action simultanée de plusieurs forces; pour qu'il soit en équilibre, il faut et il suffit que la résultante de ces forces concourantes soit nulle, ce qui se traduit, en projetant sur trois axes, par trois conditions nécessaires et suffisantes :

$$\Sigma X = 0, \qquad \Sigma Y = 0, \qquad \Sigma Z = 0. \tag{1}$$

(¹) A. Gouilly, *Sur l'enseignement élémentaire de la Mécanique* (*L'Enseignement mathématique,* 1904, n° 1).

2. Soit ensuite un *système quelconque de n points matériels*. Sur ces divers points agissent des forces : les unes, *forces extérieures*, provenant de causes extérieures au système, les autres, *forces intérieures*, provenant des actions mutuelles s'exerçant entre tous ces points deux à deux, et soumises au *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*.

Pour que le système soit en équilibre, il faut et il suffit que chacun des n points le soit, ce qui se traduit par un système de $3n$ équations de la forme (1), équations que nous appellerons (α), et qui donnent, pour l'équilibre du système, $3n$ *conditions nécessaires et suffisantes*.

Ces équations dépendent des forces intérieures. Le principe de l'égalité de l'action et de la réaction permet d'en déduire *six équations* indépendantes des forces intérieures, lesquelles expriment donc des conditions nécessaires, mais non suffisantes, pour l'équilibre du système. Nous les appellerons (β); on les forme en égalant à zéro la somme algébrique des projections des forces extérieures sur chacun des trois axes de coordonnées, ainsi que la somme algébrique de leurs moments par rapport à chacun des mêmes axes.

Rappelons enfin que ces six équations expriment que les vecteurs représentés par les forces extérieures forment un *système équivalent à zéro*, c'est-à-dire que la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe quelconque est nulle.

3. Ceci posé, considérons un corps solide, ou *système invariable*, ce que nous définirons, au point de vue mécanique, comme un système de points matériels maintenus par les forces intérieures à des distances invariables les uns des autres, ces forces intérieures

pouvant, d'ailleurs, avoir des intensités et des sens quelconques.

Nous voulons démontrer que les équations (β) expriment des conditions suffisantes pour l'équilibre d'un pareil système, ce qui veut dire :

Théorème. — *Les forces extérieures vérifiant les six conditions* (β), *il est possible de leur associer des forces intérieures, soumises au principe de l'égalité de l'action et de la réaction, de façon que les* $3n$ *équations* (α) *soient aussi vérifiées, c'est-à-dire que chacun des* n *points du système invariable soit en équilibre.*

Nous désignerons par F_i la force extérieure appliquée au point A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), ou la résultante des forces extérieures appliquées à ce point quand il y en a plusieurs, cette force F_i étant nulle quand il n'y en a aucune, puis par f_{ij} la force de liaison exercée par A_j sur A_i, force dirigée suivant la droite $A_i A_j$, mais d'intensité et de sens inconnus.

4. *Système de quatre points matériels non situés dans un même plan.* — Considérons d'abord le cas particulier d'un système invariable de quatre points A_1, A_2, A_3, A_4, non situés dans un même plan. De chacun d'eux, A_i, partent trois arêtes du tétraèdre $A_1 A_2 A_3 A_4$; ces arêtes n'étant pas dans un même plan, on peut regarder la force extérieure F_i comme la résultante de trois autres dirigées suivant ces trois arêtes; nous désignerons par F_{ij} la composante portée sur l'arête $A_i A_j$.

En vertu des conditions (β), la somme des moments des forces F_i par rapport à une arête quelconque du tétraèdre est nulle; il en résulte que les deux forces F_{ij} et F_{ji} placées sur l'arête opposée sont égales et de sens contraires.

Or, vérifier les $3n = 12$ équations (α) revient à trouver des forces intérieures maintenant en équilibre chacun des points A_i. Ceci est possible d'une manière, et d'une seule, car A_i est sollicité par une force extérieure donnée F_i, et par trois forces intérieures données seulement en direction : on prendra pour f_{ij} une force égale et directement opposée à F_{ij}. Mais alors, F_{ij} et F_{ji} étant égales et de sens contraires, il en est de même de f_{ij} et f_{ji}; les équations (α) sont bien vérifiées avec des forces intérieures soumises au principe de l'égalité de l'action et de la réaction. C. Q. F. D.

5. *Système quelconque de points matériels non situés dans un même plan.* — Pour arriver à la proposition générale, nous pouvons alors la supposer établie dans le cas de $(n-1)$ points quelconques $A_2, \ldots, A_n$, et l'étendre au cas de n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$, aucun des deux systèmes n'étant dans un même plan.

Parmi les $3n$ équations (α), on satisfera d'abord aux trois équations qui concernent l'équilibre de A_1 en choisissant les $n-1$ forces intérieures $f_{12}, \ldots, f_{1n}$, agissant sur ce point et de directions données, de façon que leur résultante soit égale et directement opposée à la force extérieure F_1. Ceci est toujours possible, les $n-1$ directions données, $A_1A_2, \ldots, A_1A_n$, n'étant pas dans un même plan, et c'est possible d'une infinité de manières, chaque solution dépendant du choix de $n-1-3 = n-4$ arbitraires.

Reste à satisfaire au système (α') des $3(n-1)$ autres équations (α), système où figurent, d'une part, les forces extérieures données $F_2, \ldots, F_n$ et, d'autre part, les forces intérieures $f_{21}, \ldots, f_{n1}$, déterminées par les conditions précédentes. On peut donc considérer toutes ces forces comme des forces extérieures agissant sur le système invariable de $(n-1)$ points matériels $A_2, \ldots, A_n$. Or, par hypothèse, les forces F_1, F_2, ..., F_n satisfont aux six équations (β); dans chacune de ces équations, on peut remplacer la projection ou le moment de F_1 par une quantité égale, la somme des projections ou des moments des forces $f_{21}, \ldots, f_{2n}$, cela, en vertu de la façon dont on a choisi les forces opposées $f_{12}, \ldots, f_{1n}$. Les six équations (β), ainsi transformées, expriment alors que l'ensemble des forces extérieures F_2, ..., F_n, f_{21}, ..., f_{n1}, appliquées au système invariable de $(n-1)$ points A_2, ..., A_n, satisfait aux six équations analogues (β'); la proposition étant admise pour un système de $(n-1)$ points, il est donc possible de disposer des forces intérieures restant inconnues de façon que les $3(n-1)$ équations (α') soient vérifiées.

C. Q. F. D.

6. *Degré d'indétermination de la solution.* — Désignons par k_n le nombre d'arbitraires dont on peut disposer dans la détermination des forces intérieures pour un système de n points matériels. Nous avons trouvé, dans ce qui précède,

$$k_4 = 0 \qquad \text{et} \qquad k_n = n - 4 + k_{n-1}.$$

On en déduit

$$k_n = (n-4) + (n-5) + \ldots + 2 + 1 = \frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

Ce résultat est d'accord avec le nombre des équations (α) et (β). En effet, les $3n$ équations distinctes (α) donnent six relations (β), indépendantes des forces intérieures, et six seulement, sans quoi celles-ci ne seraient pas suffisantes; les forces intérieures, agissant entre les n points deux à deux, forment donc $\frac{n(n-1)}{2}$ grandeurs qui, liées par $3n-6$ relations distinctes, dépendent bien d'un nombre d'arbitraires égal à

$$\frac{n(n-1)}{2}-(3n-6)=\frac{(n-3)(n-4)}{2}.$$

7. *Cas d'exception : systèmes plans; systèmes rectilignes.* — Notre raisonnement suppose essentiellement que les points matériels du système invariable ne sont pas dans un même plan, ce qui exige, en particulier, que leur nombre soit au moins égal à *quatre*.

Il reste donc à étudier un système de points matériels tous placés dans un même plan. Or, pour un pareil système, la proposition est manifestement en défaut lorsque les forces extérieures ne sont pas toutes dirigées dans ce même plan, car, si la résultante F_i des forces extérieures appliquées en A_i n'est pas dans le plan du système, les forces intérieures qui agissent sur ce point, et qui doivent toutes être dirigées dans ce plan, ne pourront jamais, quelles que soient leurs intensités, maintenir A_i en équilibre. Il peut d'ailleurs exister des forces extérieures satisfaisant aux conditions (β) et non dirigées dans le plan du système : c'est le cas, par exemple, de quatre forces parallèles, d'intensités égales, deux de même sens, appliquées à deux sommets opposés d'un parallélogramme, les deux autres de sens contraire, appliquées aux deux autres sommets.

Lorsque, au contraire, les forces extérieures sont toutes dirigées dans le plan du système invariable, la proposition est encore exacte, sauf un cas d'exception. celui d'un système de points en ligne droite; on l'établira facilement par une analyse identique à celle que nous venons de développer, débutant par l'étude d'un système de trois points, pour s'élever de là au cas général.

Reste enfin le cas d'un système invariable de points tous en ligne droite. Ici encore, la proposition tombe en défaut si les forces extérieures ne sont pas toutes dirigées sur cette même droite, mais reste exacte dans le cas contraire.

Observons, en revanche, que dans le cas d'un système formé de trois points seulement, A_1, A_2, A_3, mais non en ligne droite, les équations (β) entraînent comme conséquence que les trois forces F_1, F_2, F_3 sont dans le plan $A_1A_2A_3$: il en résulte, en effet, que le moment de F_1, par exemple, par rapport à la droite A_2A_3, est nul. De même, dans le cas de deux points seulement, A_1, A_2, il résulte des équations (β) que les forces F_1, F_2 sont dirigées suivant la droite A_1A_2, la force F_1 ayant un moment nul par rapport à toute droite issue de A_2. Dans ces deux cas simples, la proposition est donc encore exacte.

8. *Sur la résistance des corps solides.* — Les cas d'exception que nous venons de rencontrer montrent avec quelle prudence il faut raisonner, dans la statique des corps solides, lorsqu'on ne tient pas compte des conditions de résistance, c'est-à-dire des limites qui sont physiquement imposées aux intensités des forces intérieures agissant entre les divers points des corps.

Nous pouvons interpréter le cas d'un corps solide plan, sans épaisseur, comme celui d'un corps dont l'équilibre ne pourrait être réalisé qu'avec des forces intérieures infinies, dès qu'il serait soumis à des forces agissant en dehors de son plan, ou encore, comme celui d'un corps dont la fragilité serait infinie.

Par raison de continuité, on peut en conclure qu'il n'est légitime de négliger les déformations d'un système matériel soumis à des forces extérieures d'intensités déterminées, que si ce système a une épaisseur en rapport avec ces intensités.