

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 5
(1905), p. 140-144

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__140_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1905, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1929.

(1902, p. 288)

Étant donnés deux points fixes F , A et une droite Δ :
1° On considère les paraboles de foyer F qui passent par A . Lieu des pôles des droites qui joignent A aux points où ces paraboles coupent Δ .

2° On considère les cercles passant par F et tangents à Δ . Enveloppe des droites qui joignent les points de contact de Δ aux points de contact des tangentes issues de A. (Alpha.)

SOLUTION

Par M. A.-H. COUVERT.

I. Prenons pour axes de coordonnées AF et la perpendiculaire à cette droite menée par A ; soit $AF = a$.

La directrice d'une des paraboles considérées sera tangente au cercle de centre A et de rayon a ; ce sera donc

$$x \cos \theta + y \sin \theta - a = 0,$$

et la parabole II aura pour équation

$$(x - a)^2 + y^2 = (x \cos \theta + y \sin \theta - a)^2$$

ou

$$(x \sin \theta - y \cos \theta)^2 + 2a(\cos \theta - 1)x + 2a \sin \theta y = 0.$$

Soient $y = tx$ une droite AM et $y = mx + n$ la droite Δ .^{*} Exprimons que ces deux droites se coupent sur II. Leur point de rencontre est

$$x = \frac{n}{t - m}, \quad y = \frac{nt}{t - m}.$$

En écrivant que ce point est sur II, nous obtenons

$$(1) \quad n(\sin \theta - t \cos \theta)^2 + 2a(\cos \theta - 1 + t \sin \theta)(t - m) = 0.$$

Le pôle de AM est à la rencontre de la tangente à II en A et du diamètre correspondant à la direction t .

Ces deux droites ont respectivement pour équation

$$(2) \quad y = \tan \frac{\theta}{2} x,$$

$$(3) \quad \begin{cases} (x \sin \theta - y \cos \theta)(\sin \theta - t \cos \theta) \\ + a(\cos \theta + t \sin \theta - 1) = 0. \end{cases}$$

Le lieu cherché s'obtiendra en éliminant θ et t entre les équations (1), (2), (3). La relation (1) peut s'écrire, en tenant compte de (3),

$$(1') \quad n(\sin \theta - t \cos \theta) - 2(x \cos \theta - y \sin \theta)(t - m) = 0.$$

De (2), on tire

$$\sin \theta = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad \cos \theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Les relations (1') et (3) deviennent

$$n[2xy - t(x^2 - y^2)] - 2y(x^2 + y^2)(t - m) = 0$$

et

$$y[2xy - t(x^2 - y^2)] + 2a(txy - y^2) = 0,$$

ou bien

$$2nxy + 2my(x^2 + y^2) - [n(x^2 - y^2) + 2y(x^2 + y^2)]t = 0, \\ 2xy - 2ay - (x^2 - y^2 - 2ax)t = 0.$$

Le lieu cherché est donc

$$(x^2 - y^2 - 2ax)[nx + m(x^2 + y^2)] \\ - (x - a)[n(x^2 - y^2) + 2y(x^2 + y^2)] = 0$$

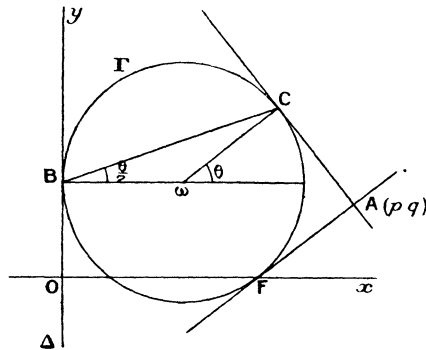
ou

$$(x^2 + y^2)(mx^2 - 2xy - my^2 - 2amx + 2ay - an) = 0.$$

C'est donc l'hyperbole équilatère

$$m(x^2 - y^2) - 2xy - 2amx + 2ay - an = 0.$$

II. Pour traiter la seconde partie, je prends comme axes la



droite Δ et FO perpendiculaire à Δ . Le centre ω d'une des circonférences Γ décrit une parabole de foyer F et de direc-

trice Δ ; ses coordonnées sont donc, en posant $FO = d$,

$$\frac{\beta^2 + d^2}{2d} \quad \text{et} \quad \beta.$$

Les coordonnées d'un point C de Γ sont

$$\begin{aligned} X &= \frac{\beta^2 + d^2}{2d} (1 + \cos \theta), \\ Y &= \beta + \frac{d^2 + \beta^2}{2d} \sin \theta = \frac{(d^2 + \beta^2) \sin \theta + 2d\beta}{2d}, \end{aligned}$$

et la tangente en C a pour équation

$$\begin{aligned} x \cos \theta + y \sin \theta &= X \cos \theta + Y \sin \theta \\ &= \frac{(d^2 + \beta^2)(1 + \cos \theta) + 2d\beta \sin \theta}{2d}. \end{aligned}$$

J'exprime qu'elle passe au point $A(p, q)$:

$$2d(p \cos \theta + q \sin \theta) = (d^2 + \beta^2)(1 + \cos \theta) + 2d\beta \sin \theta$$

ou, en posant $\tan \frac{\theta}{2} = t$,

$$(4) \quad \beta^2 + dpt^2 + 2d\beta t - 2dqt + d^2 - pd = 0.$$

La droite BC a pour équation

$$y - \beta = x \tan \frac{\theta}{2} \quad \text{ou} \quad y - tx - \beta = 0.$$

La relation (4) entre les paramètres β et t montre que cette droite enveloppe une conique. L'équation ponctuelle de cette conique s'obtient aisément. C'est

$$\begin{aligned} (d - p)(x^2 - y^2) - 2qxy \\ + 2d(p - d)x + 2dqy + d(pd - p^2 - q^2) = 0, \end{aligned}$$

hyperbole équilatère.

Remarque. — On aurait pu se dispenser de chercher l'enveloppe de BC par le calcul. Transformons, en effet, la figure par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur le cercle de centre F et de rayon FO.

La polaire réciproque de la circonférence ω est une parabole Π de foyer F passant en O , pôle de Δ . Au point fixe A correspond une certaine droite Δ_1 fixe. La polaire de B passe en O ; c'est la tangente en O à Π .

A la droite AC correspond un point I de Π situé à l'intersection de Δ_1 avec la polaire de C ; mais cette polaire est la tangente à Π en ce point. Le pôle de BC est donc à l'intersection U des tangentes à Π en O et en I , ce dernier point étant un de ceux où Π rencontre Δ_1 . La recherche de l'enveloppe de BC revient donc à la recherche du lieu de U qui fait l'objet de la première partie de ce problème.