Certificats de mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 126-136
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__126_1>

CERTIFICATS DE MÉCANIQUE.

Grenoble.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Une plaque* P *circulaire, infiniment mince, homogène, est mobile autour de son centre* O *qui est fixe.*

Une sphère homogène S, *de centre* G, *est percée suivant un diamètre par un canal de section infiniment petite.*

Un axe fixe OZ, *issu de* O, *traverse ce canal :* S *peut donc tourner autour de* OZ, *et glisser le long de cet axe. De plus* S *est assujettie à rester en contact avec le plan de* P.

Les seules forces agissant sur le système proviennent des liaisons; il n'y a pas de frottement. P *et* S *ont même masse* m *et même rayon* a.

1° *Former les équations déterminant le mouvement du système.*

2° *En appelant* OZ_1 *l'axe normal à la plaque dirigé du côté de* S, *étudier comment varie, au cours du mouvement, l'angle* θ *des axes* OZ *et* OZ_1. *On supposera qu'à l'instant initial on ait* $\sin\theta \neq 0$, *et* $\dfrac{d\theta}{dt} = 0$.

3° *Comment doit-on choisir les autres données initiales pour que* G *demeure immobile; que sont alors les réactions?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un solide pesant* S *de masse* m *est limité par un ellipsoïde dont les axes sont* $2a$, $2b$, $2c$; *on suppose* $a > b > c$.

On fixe, sur une même horizontale Δ, *les sommets* A, B *correspondant respectivement à l'axe majeur et à l'axe moyen.*

Calculer le moment d'inertie de S *relativement à* Δ *et la longueur du pendule simple synchrone du pendule composé ainsi constitué.*

On imprime à S, *supposé immobile dans la position d'équilibre stable, une percussion* mv *dirigée suivant l'axe mineur de l'ellipsoïde : déterminer* v *de façon que l'angle d'écart maximum que peut faire* S *avec sa position initiale ait une valeur donnée* θ_0. *Calculer la vitesse de rotation de* S *immédiatement après la percussion.*

Applications numériques (unités C.G.S.) : $m = 300^{g}$; $a = 4^{cm}$, $b = 3^{cm}$, $c = 2^{cm}$; $\theta_0 = 60°$; $g = 981^{cm}$.

(Juillet 1904.)

Epreuve écrite. — *Deux points matériels* M, M′ *de même masse* m *se meuvent respectivement dans deux plans* P, P′ *parallèles entre eux et parfaitement polis. Ces points agissent l'un sur l'autre, leur action mutuelle est une fonction connue de leur distance. Déterminer le mouvement des deux points.*

Étudier ce mouvement dans le cas particulier où l'action mutuelle est une attraction inversement proportionnelle au cube de la distance, les vitesses initiales des deux points étant perpendiculaires à la droite qui les joint, égales en grandeur, mais de directions opposées.

Soient Gx, Gy, Gz *des axes rectangulaires de directions fixes menés par le centre de gravité* G, *le plan* xGy *étant parallèle à* P; *soit* M_1 *la projection de* M *sur* xGy.

On déterminera la position des points :

1° *Par celle du centre de gravité;*

2° *Par les coordonnées polaires* r, θ *de* M_1, Gx *étant l'axe polaire.*

Appeler $2a$ *la distance des plans* P, P′.

On suppose que la valeur absolue de l'attraction, dans la deuxième partie du problème, est $8mk^2$, *lorsque les deux points sont à l'unité de distance.*

Solution.

A l'aide du théorème des quantités de mouvement projetées, on montre que G se meut d'un mouvement rectiligne et uniforme. Les axes $Gxyz$ sont animés d'un mouvement de translation uniforme, les équations du mouvement, rapporté à ces axes, sont les mêmes que si ces axes étaient fixes. Le théorème des moments par rapport à l'axe Gz et celui des forces vives donnent deux intégrales premières permettant d'exprimer le temps t et l'angle θ en fonction de r par des intégrales définies.

Dans la seconde partie du problème, la discussion demandée revient à celle d'un trinome bicarré en r dont on connaît déjà deux racines, r_0 et $-r_0$, r_0 étant la valeur initiale de r.

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle fixe, Oz étant vertical et dirigé vers le haut.*

Un solide pesant S peut tourner autour de Oz et glisser le long de cet axe. De plus, un point A de S doit rester à une distance constante d'un point fixe B. Ces liaisons sont sans frottement.

S atteint une position d'équilibre stable lorsque son centre de gravité est aussi bas que le permettent les liaisons. On admet que Ox passe par la position correspondante de A. Le point B est situé dans le plan zOx, ses coordonnées sont $x = b$, $y = 0$, $z = h$. On désigne par a la distance constante de A à Oz, par m la masse de S, par I son moment d'inertie relativement à Oz :

1° *On fait tourner S d'un angle θ autour de Oz (à partir de la position d'équilibre). Évaluer le glissement correspondant, c'est-à-dire la cote z du point A après la rotation ;*

2° *Pour maintenir S en équilibre dans cette position, on fait agir sur lui un couple dont l'axe est parallèle à Oz. Calculer le moment μ de ce couple;*

3° *Trouver la durée T des oscillations infiniment petites du solide autour de la position d'équilibre stable.*

Application numérique (2° *et* 3°) :

$a = 1^{\text{cm}}$, $b = 3^{\text{cm}}$, $h = 30^{\text{cm}}$. *L'angle θ est de* 30′. *S est un cercle homogène de* 1^{cm} *de rayon, de masse égale à* $0^{\text{g}},1$; *enfin Oz est un diamètre de S. L'accélération de la pesanteur g, en unités C.G.S., est* 981.

SOLUTION.

La première partie du problème précédent n'offre aucune difficulté; la seconde se traite à l'aide du principe des vitesses virtuelles, la troisième par la méthode classique.

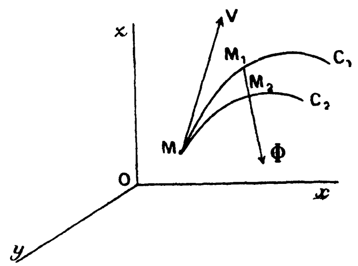
Voir, à ce sujet, la théorie de la balance bifilaire, dans les *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme* (t. II), de MM. Mascart et Joubert. (Novembre 1904.)

Lille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Application du théorème de Coriolis aux mouvements relatifs à la surface de la Terre, eu égard à la rotation de la Terre.*

II. *Mouvement apparent du pendule sphérique. Cas particulier de l'expérience de Foucault.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — I. *Un trièdre* O*xyz* *est animé d'un*



mouvement quelconque. Un point matériel lancé à l'instant t d'une position M *avec une vitesse relative* V *décrirait, sous l'action d'un certain milieu, une trajectoire apparente* C_1 *et, sous l'action d'un autre milieu, une trajectoire apparente* C_2, C_1 *et* C_2 *étant tangentes à* V *en* M. *Soient* M_1 *et* M_2 *les positions qu'aurait occupées dans les deux cas le mobile à l'instant* $t + \Delta t$. *Calculer la limite du vecteur* $\Phi = \dfrac{\overline{M_1 M_2}}{\overline{\Delta t^2}}$ *quand* Δt *tend vers zéro, et démontrer que ce vecteur est indépendant du mouvement des axes de coordonnées.*

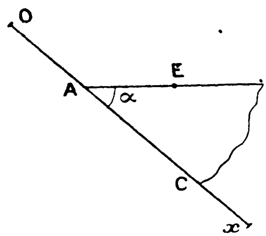
II. *Un disque circulaire homogène infiniment mince de masse m et de rayon* R *se meut dans son plan. A un instant donné, le centre instantané de rotation est un point* A *de la circonférence du disque.*

Brusquement, par une percussion, on fixe un point B *de la circonférence tel que l'arc* AB *soit le tiers de la circonférence. On demande le nouveau régime des vitesses des points du disque après cette percussion.*

(Novembre 1904.)

Marseille.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Dans un plan vertical, on donne une droite fixe* Ox *inclinée d'un angle* α *sur l'horizontale.*



Sur cette droite glisse sans frottement une plaque ABC *dont le bord supérieur* AB *est horizontal, et dont le bord* AC *s'appuie sur* Ox.

Le point A *est relié au point fixe* O *par un fil élastique dont on néglige la masse et qui s'allonge proportionnellement à la tension. Il doublerait de longueur sous l'action d'un poids égal à celui de la plaque.*

Sur le bord AB *de la plaque est placé un point* E *pesant dont le poids est égal à celui de la plaque. Ce poids peut glisser sans frottement sur* AB.

Étudier le mouvement de ce système en supposant que les vitesses initiales sont nulles et que le fil OA *a primitivement sa longueur naturelle.*

Si le bord AB *de la plaque était dépoli, que devrait être le coefficient de frottement pour que le point* E *ne glisse pas sur* AB?

Solution.

Le point E décrit une verticale. Soit N la pression de la plaque sur le point E, soit OA $= x$, soient m la masse de la plaque et a la longueur primitive du fil, on a en projection sur Ox

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg\sin\alpha + \mathrm{N}\sin\alpha - mg\frac{x-a}{a},$$

et en projection verticale

$$m\frac{d^2x}{dt^2}\sin\alpha = mg - \mathrm{N}.$$

On tire de là

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{(1+\sin^2\alpha)a}[x - a(1+2\sin\alpha)] = 0.$$

D'où, en tenant compte des valeurs initiales,

$$x = a(1+2\sin\alpha) - 2a\sin 2\alpha\cos\left(\sqrt{\frac{g}{a(1+\sin^2\alpha)}}\,t\right),$$

on a un mouvement oscillatoire.

S'il y a frottement et si E est fixe sur la plaque, le point et la plaque ne font qu'un corps et l'on a

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = 2g\sin\alpha - g\frac{x-a}{a},$$

ce qui détermine x.

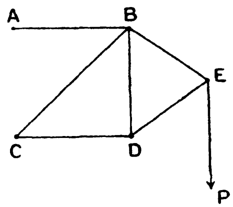
L'équilibre relatif de E s'obtient en ajoutant la force d'entraînement dont la projection $m\frac{d^2x}{dt^2}\cos\alpha$ doit faire équilibre au frottement Nf. On trouve N comme plus haut, et Nf s'exprime en fonction de x. Il faut que f soit au moins égal au maximum de la valeur trouvée.

Épreuve pratique. — *En deux points fixes* A *et* C *situés sur une même verticale sont articulées des tiges* AB, CB, CD.

En B *et* D *sont articulées des tiges* BD, BE, DE.

Les deux dernières sont articulées en E.

La figure ABCD *est un carré, la figure* BDE *est un triangle équilatéral.*



En E *on suspend un poids* P *de* 1000^{kg}, *trouver les tensions des tiges.*

On calculera et l'on graphiquera.

(Novembre 1904.)

Nancy.

Épreuve écrite. — *Soit* S *un solide rigide formé par un cône homogène de hauteur* $h = 80^{cm}$ *égale au diamètre de sa base, et par une demi-sphère homogène limitée à cette base, la densité de la demi-sphère étant la moitié de celle du cône.*

Le sommet O *du cône étant supposé fixe, combien faut-il imprimer de tours par seconde à l'axe du solide* S *placé horizontalement pour que la nutation, dans le mouvement de ce solide abandonné à l'action de son poids, ait une amplitude de* $30°$? *Quelle est alors la période de la nutation? Quelle est la vitesse de précession au commencement et à la fin de chaque période? Quelle est la forme de la courbe décrite par la projection du centre de gravité du solide* S *passant par* O?

(Juillet 1904.)

Epreuve écrite. — *Un point matériel pesant est assujetti à ne pas quitter la circonférence d'un cercle vertical, de rayon égal à* $3^m,50$, *qui tourne d'un mouvement uniforme autour de son diamètre vertical* $z'Oz$ *en faisant* 32 *tours par minute.*

On abandonne le point matériel à midi, sans vitesse initiale, en un point donné A_0 *du cercle vertical; soit* θ_0 *l'angle que fait le rayon* OA_0 *avec la nadirale* Oz. *Étudier le mouvement du point matériel pour toutes les valeurs de* θ_0 *comprises entre* 75° *et* 76°. *Calculer en particulier la position qu'il occupe à* 6^h *du soir.*

(Novembre 1904.)

Paris.

ÉPREUVE ÉCRITE. — *Un cerceau* C *homogène et pesant glisse sans frottement dans un plan vertical* xOy *sur une droite fixe* Ox, *inclinée de* 45° *sur la verticale. A l'intérieur de* C *glisse sans frottement un autre cerceau* Γ, *homogène, pesant et de même masse que le premier, mais de rayon deux fois moindre.*

1° *Étudier le mouvement du système abandonné sans vitesse dans le plan vertical* xOy, *en une position où les points de contact de* C *avec* Ox *et avec* Γ *coïncident. Calculer les réactions de* C *sur* Ox *et sur* Γ.

2° *Traiter la même question en supposant que* Γ, *au lieu de glisser sans frottement, engrène sur* C *de manière à rouler sans glisser.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un ellipsoïde de révolution, dont l'axe de révolution est vertical et a une longueur de* 40^{cm}, *et dont l'équateur a un rayon de* 10^{cm}, *renferme une masse gazeuse de* 10^g, *pesante et en équilibre isotherme. On admet que, en chaque point, la densité du gaz est égale à la pression mesurée en unités* C.G.S.

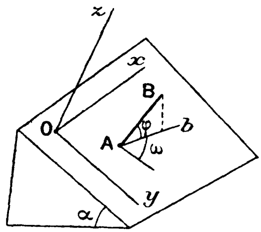
Démontrer que les pressions exercées par le gaz sur les parois (supposés solides) du demi-ellipsoïde situé au-dessous du plan de l'équateur ont une résultante unique et calculer cette résultante unique en dynes. L'accélération g *de la pesanteur sera prise égale à* 980.

(Octobre 1904.)

Poitiers.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Deux côtés d'un triangle glissent sur deux circonférences fixes; montrer que le troisième côté enveloppe également une circonférence.*

II. *Une barre homogène pesante dont une extrémité s'appuie et peut glisser sans frottement sur un plan incliné est abandonnée,* SANS VITESSE INITIALE, *à l'action de*



la pesanteur; étudier son mouvement. Réaction du plan.

Notations :

α, *angle aigu du plan incliné avec l'horizon; on définira la position de la barre en donnant les coordonnées* (x, y) *de l'extrémité* A *qui appartient au plan incliné, l'angle* φ *que fait* AB *avec sa projection* Ab *sur ce plan et l'angle* ω *de* Ab *avec la ligne de plus grande pente du plan dirigé vers le bas;*

$2l$, *longueur de la barre;*

m, *sa masse;*

Ox, *horizontale du plan;*

Oy, *ligne de plus grande pente dirigée vers le bas;*

Oz, *normale au plan vers le haut* (*trièdre direct*).

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Déterminer l'ellipsoïde principal d'inertie qui correspond à un tétraèdre homogène. Moments principaux.* (PROBLÈME AUXILIAIRE : *En décomposant le tétraèdre en volumes élémentaires par des plans parallèles à l'une des faces, on calculera le moment d'inertie du tétraèdre par rapport à un plan quelconque passant par le quatrième sommet.*) (Juillet 1904.)

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Une porte rectangulaire homogène est fixée par deux gonds à un axe faisant un angle* α *avec la verticale; on lui fait faire un angle* β *avec le plan vertical passant par l'axe et on l'abandonne à elle-*

même. Trouver le mouvement et les pressions sur les gonds. Oscillations infiniment petites, leur période.

II. *On considère une figure plane invariable* F, *mobile dans un plan et un point fixe* A *de ce plan. Quel est le lieu des points* M *de la figure* F *pour lesquels le rayon vecteur* AM *balaie dans un temps déterminé* (t_0, t_1) *une aire donnée?*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un pendule simple oscille dans un milieu raréfié; la résistance très petite comprend un terme proportionnel à la vitesse et un terme proportionnel au carré de la vitesse. On demande l'expression approchée du mouvement dans une oscillation complète (montée, descente) en supposant que ces deux termes sont des infiniment petits du premier ordre ainsi que l'amplitude de l'oscillation.*

NOTA. — *Pousser l'approximation jusqu'au troisième ordre.* (Novembre 1904.)

Toulouse.

ÉPREUVE ÉCRITE. — I. *Un cercle non homogène, pesant, situé dans un plan vertical, peut rouler sur une droite horizontale de ce plan, assez rugueuse pour empêcher tout glissement.*

Trouver le mouvement du cercle.

Calculer les composantes de la réaction de la droite.

II. *Deux points matériels non pesants, de masses égales, sont mobiles sans frottement sur une circonférence fixe et se repoussent proportionnellement à la distance. Trouver leur mouvement.*

ÉPREUVE PRATIQUE. — *Un parallélépipède rectangle, homogène, pesant, est mobile autour de sa plus petite arête supposée horizontale et fixe.*

Les longueurs des trois arêtes sont respectivement

$$0^{m},8, \quad 0^{m},6, \quad 0^{m},2.$$

Calculer, à $\frac{1}{1000}$ de seconde près, la durée d'oscillation de ce pendule dans le vide.

L'accélération de la pesanteur est de $9^{m},81$ *par seconde.*

(Novembre 1904.)