NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 123-126

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__123_0>

BIBLIOGRAPHIE.

Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynomes, professées à l'École Normale supérieure; par M. *E. Borel*, rédigées par M. Fréchet et augmentées de Notes de MM. Painlevé et Lebesgue. — 1 vol. grand in-8° de x-160 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1905. Prix : $4^{\text{fr}},50$.

Ce Volume fait partie de la collection de monographies sur la *Théorie des fonctions* publiée sous la direction de M. Borel. Comme les autres, il est complet en lui-même et n'exige pas forcément de retour sur les Volumes précédents. C'est ainsi qu'il débute en présentant la Théorie des ensembles, surtout au point de vue de son utilité pour ce qui suivra, bien que cette théorie ait déjà été exposée dans les *Leçons sur la Théorie des fonctions*. Le premier Chapitre semble, au premier abord, un peu aride, mais on voit rapidement que les travaux modernes relatifs à la Théorie des fonctions ont impérieusement exigé des perfectionnements et des créations successives dans la Théorie des ensembles qui, d'ailleurs, ne s'en sépare plus guère. Ainsi, quant aux nouveautés intéressantes et en dehors des travaux de M. Borel lui-même, nous signalerons particulièrement une extension de l'idée de mesure d'un ensemble, due à M. Lebesgue, et, quelques pages plus loin, celle de catégorie d'un ensemble due à M. Baire.

En abordant la notion de continuité, nous trouvons d'abord la définition de l'oscillation d'une fonction, puis la fonction continue elle-même définie en un point par ce fait que son oscillation est nulle en ce point, l'idée de la mesure d'une discontinuité et celle de fonction ponctuellement discontinue. Le Chapitre se termine par un résumé des travaux de M. Lebesgue sur les fonctions intégrables.

Le Chapitre III étudie de façon tout à fait générale les séries de fonctions réelles et rappelle d'abord les travaux de

MM. Osgood et Arzela. Le point important est surtout de savoir si une série de fonctions continues représente toujours une fonction continue; il n'en est rien, sauf d'abord le cas de *convergence uniforme;* mais, ainsi que M. Bendixson l'a montré, ce n'est pas là une condition *nécessaire.*

La condition à la fois nécessaire et suffisante est due à M. Arzela qui est ainsi amené à introduire une nouvelle notion : celle de *convergence quasi-uniforme.* Nous voyons ensuite rapidement l'intégration des séries avec les nouveaux perfectionnements dus à M. Lebesgue.

Toutes ces considérations vont trouver leur application dans le Chapitre IV où nous abordons l'étude des séries de polynomes comme séries formées de fonctions continues fort simples. Les premières méthodes proposées pour obtenir de tels développements reposent, au fond, sur la considération de fonctions analytiques de deux variables pouvant se réduire pour une valeur bien déterminée, mais exceptionnelle, de l'une des variables à une fonction de l'autre non forcément analytique. Si la première variable ne prend pas exactement la valeur exceptionnelle en question mais s'en approche, on aura un développement analytique représentant une fonction qui peut ne pas l'être, non pas, bien entendu, de façon rigoureuse, mais avec l'approximation qu'on voudra. Tels sont, au fond, les méthodes de Weierstrass et de M. Picard.

D'autres démonstrations sont fondées sur la propriété d'approcher, autant qu'on le veut, d'une ligne continue au moyen de contours polygonaux, ou bien sur l'emploi des séries trigonométriques, méthodes qui ont l'avantage de présenter un caractère assez élémentaire. Ces résultats s'étendent facilement aux fonctions de plusieurs variables, et M. Borel rappelle ensuite les travaux de M. Painlevé sur la représentation des fonctions par des polynomes lorsque ces fonctions admettent des dérivées jusqu'à un certain ordre et que l'on veut représenter à la fois la fonction et ses dérivées par une série de polynomes et les dérivées de celle-ci prises terme à terme. Le résultat est simple et revient à représenter d'abord $f^{(n)}(x)$, puis à remonter à $f(x)$ par des intégrations successives. M. Borel expose ensuite un procédé de développement dont l'idée, je crois, lui appartient en propre, et dans lequel chaque terme est de la nature du terme d'une série trigonométrique augmenté d'un polynome. Nous abordons ensuite un sujet prodigieusement intéressant. Les procédés précédents ne sont-ils pas d'une science un peu oiseuse? Une fonction continue ne peut-elle pas être représentée avec l'approximation qu'on veut, sous forme d'un polynome, en employant tout simplement la formule d'interpolation de Lagrange? M. Borel montre qu'il n'en est rien et donne un fort bel exemple d'un cas où la formule de Lagrange donne des approximations de moins en moins satisfaisantes; il rappelle aussi des conclusions analogues dues à MM. Mittag-Leffler et Runge et essaie de donner une théorie générale de l'interpolation non soumise aux inconvénients précédents.

Dans le Chapitre V et dernier, nous étudions la représentation des fonctions discontinues, théorie presque entièrement dominée par les belles recherches de M. R. Baire qui prouvent que la continuité n'est pas une condition nécessaire, quant au développement en série de polynomes, et qui définissent nettement la nature des discontinuités des fonctions susceptibles d'admettre de semblables développements.

L'Ouvrage comprend ensuite une Note fort importante de M. P. Painlevé où il s'agit aussi d'un mode de développement en séries de polynomes, mais en se plaçant exclusivement au point de vue des fonctions analytiques. C'est le problème intéressant résumé déjà par M. Hadamard dans son Ouvrage : *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Collection Scientia). Il s'agit, en effet, de développements qui ne sont plus astreints, comme les séries de Taylor, à converger dans des cercles, mais peuvent converger dans tout le plan, sauf peut-être sur un certain système de demi-droites formant *étoile*. La méthode de M. Painlevé revient aussi, au fond, à considerer des fonctions analytiques de plusieurs variables que l'on développe d'abord par rapport à l'une d'elles. Si l'on donne à celle-ci la valeur particulière 1, nous avons un développement par rapport aux autres variables, somme des coefficients de la série primitive, développement admettant d'ailleurs des transformations dans le détail desquelles il serait trop long d'entrer ici, transformations jouant un rôle fondamental dans les recherches de M. Painlevé et qui dépendent elles-mêmes de transformations conformes.

Après cette savante Note, nous en trouvons une seconde dans laquelle M. Lebesgue revient sur la démonstration des résultats fondamentaux dus à M. Baire, et une troisième de

M. Borel, en laquelle l'auteur étudie la classification des *fonctions discontinues*, proposée encore par M. Baire, et montre la fécondité de cette nouvelle notion en rappelant que ces classes contiennent bien chacune effectivement une infinité de fonctions définies dans la classe n par une série de polynomes n^{uple}. A. Buhl (Montpellier).