Nouvelles annales de mathématiques

G. Fontené

Polygones gauches de Poncelet. Extension du théorème de Cayley à l'espace

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 114-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__114_1>

[L²17eα]

POLYGONES GAUCHES DE PONCELET. EXTENSION DU THÉORÈME DE CAYLEY A L'ESPACE;

PAR M. G. FONTENÉ.

1. Cayley a donné sous une forme remarquable les conditions de fermeture des polygones de Poncelet.

Le polygone de n côtés devant être

circonscrit à la conique S,
inscrit à la conique S',

et les invariants relatifs à ces deux coniques étant δ, θ, θ', δ', si la racine carrée du polynome

$$\delta + \theta h + \theta' h^2 + \delta' h^3,$$

discriminant de la forme $S + hS'$, est

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + \ldots,$$

les conditions de fermeture sont respectivement, pour

$n = 3, 5, 7, \ldots,$

$$C = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D \\ D & E \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} C & D & E \\ D & E & F \\ E & F & G \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots,$$

et, pour $n = 4, 6, 8, \ldots,$

$$D = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \quad \ldots.$$

Cayley a donné ce théorème en 1853 dans les *Philosophical Magazine :* il l'a déduit de la Théorie des fonctions elliptiques. Il a donné en 1861, dans le *Philosophical Transactions,* une démonstration simplifiée qui a été reproduite dans *The mathematical Papers of Cayley* (t. IV, p. 292). M. Lelieuvre a donné, en 1900, une démonstration du théorème de Cayley, dans *l'Enseignement mathématique.*

2. Extension du théorème de Cayley au cas de l'espace. — *Étant données une quadrique réglée* S *et une biquadratique gauche* C′ *tracée sur* S, *il est généralement impossible d'obtenir un contour gauche de* $2p$ *côtés, dont les côtés soient portés par des génératrices de* S *et dont les sommets soient sur* C′; *si un tel contour existe, il en existe une infinité.*

Soit S′ *une quadrique quelconque passant par* C′, *et désignons par* δ, θ, φ, θ', δ' *les invariants relatifs aux deux quadriques* S *et* S′; *la racine carrée du polynome*

$$\delta + \theta h + \varphi h^2 + \theta' h^3 + \delta' h^4$$

étant

$$A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + Eh^4 + \ldots,$$

les conditions de fermeture du polygone sont respec-

tivement, pour $2p = 4, 6, 8, \ldots$,

$$D = 0, \qquad \begin{vmatrix} D & E \\ E & F \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} D & E & F \\ E & F & G \\ F & G & H \end{vmatrix} = 0, \qquad \ldots.$$

3. Afin de dégager la démonstration, je montrerai d'abord que, si les conditions indiquées sont satisfaites pour une certaine quadrique S' passant par la biquadratique C', elles le sont pour toutes. Le discriminant de la forme $kS + S'$ est

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \ldots;$$

si l'on remplace la forme S' par la forme $mS + S'$, on considère la forme $kS + (mS + S')$ ou $(k+m)S + S'$, dont le discriminant est

$$\delta(k+m)^4 + \theta(k+m)^3 + \varphi(k+m)^2 + \ldots,$$

ou

$$\delta k^4 + (\theta + 4m\delta)k^3 + (\varphi + 3m\theta + 6m^2\delta)k^2 + \ldots,$$

de sorte que l'on a, pour la nouvelle quadrique S'_1,

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= \delta, \\
\theta_1 &= \theta + 4m\delta, \\
\varphi_1 &= \varphi + 3m\theta + 6m^2\delta, \\
\theta'_1 &= \theta' + 2m\varphi + 3m^2\theta + 4m^3\delta, \\
\delta'_1 &= \delta' + m\theta' + m^2\varphi + m^3\theta + m^4\delta.
\end{aligned}$$

Au moyen des relations

$$\begin{aligned}
A^2 &= \delta, & 2AB &= \theta, \\
2AC + B^2 &= \varphi, & 2AD + 2BC &= \theta', \\
2AE + 2BD + C^2 &= \delta', & AF + BE + CD &= 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots&.., & \ldots\ldots\ldots\ldots&..,
\end{aligned}$$

et en supposant, pour simplifier, $\delta = 1$, on trouve facilement

$$A_1 = A, \qquad B_1 = B + 2m, \qquad C_1 = C + Bm + m^2,$$

et ensuite

$$\begin{aligned}
D_1 &= D,\\
E_1 &= E - \phantom{2E m +{}} Dm,\\
F_1 &= F - 2Em + \phantom{3Em^2 -{}} Dm^2,\\
G_1 &= G - 3Fm + 3Em^2 - Dm^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Dès lors, pour $2p = 8$ par exemple, la condition

$$\begin{vmatrix} D_1 & E_1 & F_1 \\ E_1 & F_1 & G_1 \\ F_1 & G_1 & H_1 \end{vmatrix} = 0$$

se ramène facilement à la même condition sans indice. A la dernière ligne on ajoute la précédente multipliée par $2m$ et la première multipliée par m^2 ; à la seconde ligne on ajoute la première multipliée par m ; cela donne

$$\begin{vmatrix} D & E - Dm & F - 2Em + Dm^2 \\ E & F - Em & G - 2Fm + Em^2 \\ F & G - Fm & H - 2Gm + Fm^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On achève en opérant de même sur les colonnes.

Cela permet de supposer que la quadrique S' est l'un des quatre cônes du second degré qui passent par la biquadratique C' ; on a alors

$$\delta' = 0.$$

4. La démonstration est maintenant facile. Les deux quadriques S et S' seront dans les conditions requises si l'un des quatre cônes passant par la biquadratique, et le cône du même sommet circonscrit à S admettent des angles polyèdres de $2p$ côtés circonscrits au second et inscrits au premier ; cela démontre la première partie du théorème. Pour la seconde partie, la quadrique S' étant supposée être l'un des quatre cônes en question,

soient les équations des deux quadriques mises sous la forme

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + t^2 = 0,$$
$$(S') \qquad a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 \qquad = 0;$$

les équations des deux cônes sont alors

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$
$$a'x^2 + b'y^2 + c'z^2 = 0,$$

et, si les cinq invariants relatifs aux deux quadriques sont δ, θ, φ, θ', 0, les quatre invariants relatifs aux deux cônes sont δ, θ, φ, θ'. Dès lors les constantes A, B, C, ... sont les mêmes pour les deux cônes et pour les deux quadriques. Donc....

5. Si l'on annule le discriminant de la forme $kS + S'$, ce qui donne l'équation

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \theta' k + \delta' = 0,$$

et si l'on désigne par a, b, c, d les racines de cette équation, en supposant $\delta = 1$, les invariants θ, φ, θ', δ' sont des degrés 1, 2, 3, 4 par rapport à ces racines, et les quantités A, B, C, D, E, ... sont des degrés 0, 1, 2, 3, 4, ... : les degrés des conditions

$$D = 0, \qquad DF - E^2 = 0, \qquad \ldots$$

sont donc 3, 3 + 5, ... ou $2^2 - 1$, $3^2 - 1$, ..., $p^2 - 1$ par rapport aux racines a, b, c, d.

6. *Exemples.* — On a

$$A = \sqrt{\delta}, \qquad B = \frac{\theta}{2\sqrt{\delta}}, \qquad C = \frac{4\delta\varphi - \theta^2}{8\delta\sqrt{\delta}},$$

et la condition $D = 0$, ou $2BC = \theta'$, relative au cas $2p = 4$, devient

$$(2p = 4) \qquad \theta(\theta^2 - 4\,\delta\varphi) + 8\,\delta^2\theta' = 0.$$

On vérifie aisément cette condition en prenant comme tétraèdre de référence un tétraèdre dont les arêtes autres que DA et BC forment un contour quadrangulaire situé sur S et inscrit à S'.

La quadrique S étant donnée, et un contour quadrangulaire étant tracé sur cette surface, il est digne de remarque que toute quadrique S', simplement assujettie à passer par les quatre sommets de ce contour, donne lieu à une condition invariante. On peut écrire

$$(2p = 4) \qquad (d + a - b - c) \times \ldots \times \ldots = 0.$$

On a encore

$$(2p = 6) \quad \left(\sqrt{d-a} \pm \sqrt{d-b} \pm \sqrt{d-c}\right) \times \ldots = 0,$$

$$(2p = 8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left[(a + b - c - d)^2 \right. \\ \quad \left. \pm 4\sqrt{(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)}\right] \times \ldots = 0. \end{array} \right.$$

Cette dernière condition, rendue entière, est du degré 4×3 ou 12, tandis que la condition par un déterminant est du degré 15; le premier membre de celle-ci renferme, en effet, un facteur étranger qui est le premier membre de la condition relative au cas $2p = 4$.

La forme des relations précédentes est en harmônie avec le fait que la quadrique S' est l'une quelconque des quadriques passant par la biquadratique C'; on peut en effet, dans ces relations, augmenter les quantités a, b, c, d d'une constante arbitraire $-m$.

7. *Autre énoncé du théorème.* — On a d'abord un théorème corrélatif en prenant une quadrique réglée S' et une biquadratique tangentielle C dont les plans oscu-

lateurs soient tangents à S'; on considère alors un contour dont les côtés soient portés par des génératrices de S' et dont les plans des angles soient osculateurs à C. On fait intervenir une quadrique quelconque S admettant pour plans tangents les plans osculateurs de C.

Comme deux quadriques réglées sont polaires, réciproques l'une de l'autre (par rapport à huit quadriques), on a encore ce théorème :

Étant données deux quadriques réglées S *et* S', *il est généralement impossible d'obtenir un contour gauche de* $2p$ *côtés situé sur* S *et ayant ses sommets sur* S', *ou un contour gauche de* $2p$ *côtés situé sur* S' *et ayant les plans de ses angles tangents à* S; *s'il existe un contour de l'une ou de l'autre nature, il existe une infinité de contours de l'une et de l'autre nature.*

Dans ce dernier cas, la même chose a lieu en remplaçant la quadrique S' *par une quadrique quelconque du faisceau ponctuel déterminé par* S *et* S', ou *la quadrique* S *par une quadrique quelconque du faisceau tangentiel déterminé par* S *et* S'.

Les conditions de fermeture pour $2p = 4, 6, 8, \ldots$ *sont celles du n°* 2.

8. Le fait que l'on peut substituer indifféremment à la quadrique S' une quadrique..., ou à la quadrique S une quadrique..., correspond à des faits de calcul dont le mécanisme est facile à saisir.

Les équations ponctuelles des quadriques étant

$$S = 0, \qquad S' = 0,$$

le discriminant de la forme

$$kS + S'$$

est

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \ldots;$$

les équations tangentielles des deux quadriques, telles qu'on les déduit régulièrement de leurs équations ponctuelles, étant

$$\Sigma = 0, \qquad \Sigma' = 0,$$

le discriminant de la forme

$$l\Sigma' + \Sigma$$

est, avec des notations qui se comprennent aisément,

$$\Delta' l^4 + \Theta' l^3 + \ldots$$

ou

$$\delta'^3 . l^4 + \delta'^2 \theta . l^3 + \delta\delta' \varphi . l^2 + \delta^2 \theta' . l + \delta^3,$$

et le produit par $\delta\delta'$ est

$$\delta . \delta'^4 . l^4 + \theta . \delta\delta'^3 . l^2 + \varphi . \delta^2 \delta'^2 . l^2 + \theta' . \delta^3 \delta' . l + \delta' . \delta^4;$$

le discriminant de la forme

$$k\left(\frac{\Sigma'}{\delta'}\right) + \left(\frac{\Sigma}{\delta}\right),$$

multipliée par $\delta\delta'$, est donc

$$\delta k^4 + \theta k^3 + \varphi k^2 + \theta' k + \delta',$$

c'est-à-dire le discriminant de la forme $kS + S'$.

Sur des formes réduites, les équations ponctuelles des deux quadriques S et S' étant

$$(S) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = 0,$$

$$(S') \qquad a'x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

leurs équations tangentielles, après division par δ et δ'

comme ci-dessus, sont

$$(\Sigma) \qquad A u^2 + B v^2 + \ldots = 0 \qquad \left(A = \frac{1}{a}, \ \ldots\right),$$

$$(\Sigma') \qquad A' u^2 + B' v^2 + \ldots = 0 \qquad \left(A' = \frac{1}{a'}, \ \ldots\right),$$

et les racines du discriminant de la forme $kS + S'$ (ou de la forme $k\Sigma' + \Sigma$) sont

$$-\frac{a'}{a}, \quad \ldots \quad \text{ou} \quad -\frac{A}{A'}, \quad \ldots;$$

que l'on remplace S' par $mS + S'$, ou Σ par $m\Sigma' + \Sigma$, ces racines augmentent de $-m$, et les conditions de fermeture continuent à être satisfaites si elles l'étaient primitivement.

Note. — Dans le Volume des *Nouvelles Annales* pour 1904 (p. 433), j'ai indiqué comme probable une extension du théorème des polygones de Poncelet à l'espace, pour des polyèdres de genre *un*. J'ai réussi à démontrer complètement le théorème pour $p = 3$, $q = 3$ (*Bulletin de la Société mathématique*). Pour $p = 4$, $q = 4$, avec les notations de la Note actuelle, la condition est

$$b + c + d - a = 0;$$

la condition

$$b + c = d + a$$

est relative au cas singulier où, les sommets du polyèdre se confondant deux à deux, ce polyèdre se transforme en un polyèdre à 8 sommets, 8 faces, 16 arêtes, qui est précisément le polyèdre signalé par M. Bricard. Cette dernière condition est en même temps celle que l'on a obtenue ci-dessus pour $2p = 4$.