NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

MAURICE FRÉCHET

Généralisation du problème de Pfaff

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 110-114

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__110_0>

[H6b]

GÉNÉRALISATION DU PROBLÈME DE PFAFF;

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

Notation de M. Méray. — Indiquons d'abord la notation que nous allons employer et dont l'idée est due à M. Méray.

Étant données n fonctions $x_1, \ldots, x_r$ de r paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_r$, nous poserons

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_r) = \frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)} d\omega_1\, d\omega_2 \ldots d\omega_r$$

en désignant par $d\omega_i$ la différentielle de ω_i et par

$$\frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$$

le déterminant fonctionnel de $x_1, \ldots, x_r$ par rapport à $\omega_1, \ldots, \omega_r$.

On voit alors que la *différentielle multiple*

$$d(x_1, \ldots, x_r)$$

a, avec le déterminant fonctionnel $\frac{D(x_1, \ldots, x_r)}{D(\omega_1, \ldots, \omega_r)}$, le même lien que la différentielle dy avec la dérivée y'_x.

On démontre facilement que, si $y_1, \ldots, y_r$ sont r fonctions de n quantités, $x_1, \ldots, x_n$ dépendant de $\omega_1, \ldots, \omega_r$, on a

$$d(y_1, \ldots, y_r) = \sum_{i_1, \ldots, i_r} \frac{D(y_1, \ldots, y_r)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})} d(x_{i_1} \ldots x_{i_r}),$$

si $n \geqq r$, et

$$d(y_1, \ldots, y_r) = 0$$

si $n < r$.

Position du problème. — Ceci étant, nous voulons résoudre le problème suivant :

Trouver les relations entre les quantités $p_{i_1,\ldots,i_r}$ (*où* $i_1, \ldots, i_r$ *forment une combinaison quelconque de* r *des nombres* $1, \ldots, n$) *et* $x_1, \ldots, x_n$ *qui entraînent la relation*

$$(1) \qquad \sum_{i_1,\ldots,i_r} p_{i_1,\ldots,i_r}\, d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}) = 0 \qquad \text{avec} \qquad n \geqq r.$$

On obtient le problème communément appelé *problème de Pfaff* pour $r = 1$.

Le problème ne se pose que si $x_1, \ldots, x_n$ ne sont pas indépendants, mais au contraire sont fonctions de r paramètres $\omega_1, \ldots, \omega_r$. Montrons d'abord que l'égalité (1) ne peut avoir lieu *quel que soit le système de fonctions de* $\omega_1, \ldots, \omega_r$ *qui représentent* $x_1, \ldots, x_n$, que si tous les p sont nuls.

En effet, l'équation (1) est équivalente à la suivante

$$\sum_{i_1} \left\{ \left[\sum_{i_2,\ldots,i_r} p_{i_1,\ldots,i_r} \frac{D(x_{i_2}, \ldots, x_{i_r})}{D(\omega_2, \ldots, \omega_r)} \right] \frac{\partial x_{i_1}}{\partial \omega_1} \right\} = 0.$$

Or on peut, en laissant aux crochets des valeurs fixes, donner aux quantités $\frac{\partial x}{\partial \omega_1}$ des valeurs arbitraires puisque les x sont, par hypothèse, des fonctions absolument arbitraires des ω. Il faut donc que les crochets soient nuls, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sum_{i_2,\ldots,i_r} p_{i_1,\ldots,i_r}\, d(x_{i_2}, \ldots, x_{i_r}) = 0 \qquad (i_1 = 1, \ldots, n),$$

en considérant $x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_n$ comme des fonctions arbitraires de $\omega_2, \ldots, \omega_r$. Nous sommes ramenés au même problème où l'on a remplacé n, r

par $n - 1$, $r - 1$. En opérant successivement de la même manière, nous arriverons à l'égalité

$$\sum_{i_r} p_{i_1,\ldots,i_r}\, dx_{i_r} = 0$$

qui doit avoir lieu quelles que soient les fonctions de ω_r qui représentent les x autres que $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r-1}}$. Par suite les p sont nécessairement nuls.

Solution du problème de Pfaff généralisé. — Ainsi l'équation (1) n'admet que la solution banale

$$p = 0$$

lorsque les x sont fonctions arbitraires de $\omega_1, \ldots, \omega_r$, c'est-à-dire fonctions arbitraires de r d'entre elles.

Ce cas est celui où toutes les $n - r$ relations indépendantes qui doivent exister entre les x pour que le problème ait un sens sont arbitraires. Voyons ce qui arrive lorsqu'on se donne un nombre déterminé $n - q$ de ces relations; soient

$$(2)\qquad f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad \ldots, \qquad f_q(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

avec, nécessairement, $q \leqq n - r$.

Ces relations indépendantes sont résolubles par rapport à q des x; on peut donc les mettre sous la forme

$$(3)\qquad x_1 = \varphi_1(x_{q+1}, \ldots, x_n), \qquad \ldots, \qquad x_q = \varphi_q(x_{q+1}, \ldots, x_n).$$

Par suite, l'équation obtenue en remplaçant $x_1, \ldots, x_n$ par leurs expressions (3) dans (1) est une équation de même forme où n'entrent que les différentielles multiples de $x_{q+1}, \ldots, x_n$, r à r. Et cette équation devant avoir lieu quelles que soient les $n - q - r$ relations arbitraires qui doivent exister entre $x_{q+1}, \ldots, x_n$, les coefficients des différentielles multiples qui y figurent doivent être nuls d'après ce qui précède. On a donc des équations qui déterminent d'une façon unique les $p_{j_1,\ldots,j_r}$ dans lesquels les j sont supérieurs à q

$$(4)\quad p_{j_1,\ldots,j_r} + \sum p_{i_1,\ldots,i_s,j_{k_1},\ldots,j_{k_{r-s}}} \frac{D(\varphi_{i_1},\ldots,\varphi_{i_s},x_{j_{k_1}},\ldots,x_{j_{k_{r-s}}})}{D(x_{j_1},\ldots,x_{j_r})} = 0,$$

où $i_1, \ldots, i_s$ sont inférieurs à q et où $j_{k_1}, \ldots, j_{k_{r-s}}$ sont $r-s$ des nombres $j_1, \ldots, j_r$.

Les équations (3) et (4) forment donc la solution la plus générale de l'équation de Pfaff généralisée (1).

On voit que cette solution dépend de q fonctions arbitraires, q pouvant prendre les valeurs $1, \ldots, n-r$. Et elle détermine $q + C_{n-q}^r$ des quantités x, p en fonctions des $n - q + C_n^r - C_{n-q}^r$ autres.

On pourrait obtenir la solution générale en partant des équations non résolues (2) et en appliquant la méthode des multiplicateurs à l'équation (1) et aux équations

$$d\,f_j(x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_{r-1}}) = 0,$$

qui sont conséquences de (2).

Remarque. — Dans le même ordre d'idées, on pourrait être amené à généraliser la théorie des transformations de contact en cherchant à déterminer des fonctions $X_1, \ldots, X_n, P_{1,\ldots,r}, \ldots, P_{i_1,\ldots,i_r}, \ldots$ des variables $x_1, \ldots, x_n, p_{1,\ldots,r}, \ldots, p_{i_1,\ldots,i_r}, \ldots$ qui satisfassent à l'égalité

$$\sum P_{i_1,\ldots,i_r}\, d(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r}) = \sum p_{i_1,\ldots,i_r}\, d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r}).$$

On aura *une* solution évidente (qui correspond aux transformations *prolongées* de Lie) en prenant pour $X_1, \ldots, X_n$ des fonctions de $x_1, \ldots, x_n$ qui définissent une transformation réversible quelconque. Car alors les P seront des fonctions bien déterminées des x et des p, linéaires et homogènes par rapport aux p :

$$P_{i_1,\ldots,i_r} = \sum p_{j_1,\ldots,j_2} \frac{D(x_{j_1}, \ldots, x_{j_r})}{D(X_{i_1}, \ldots, X_{i_r})}.$$

Mais il semble que l'on doive chercher dans une autre voie une véritable généralisation de la théorie complète de Lie (en faisant intervenir des considérations de calcul fonctionnel).