NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

OSÉE MARCUS

Démonstration géométrique du théorème sur la constance du rapport anharmonique des quatre tangentes, menées à une cubique par un de ses points

Nouvelles annales de mathématiques 4e série, tome 5 (1905), p. 105-106

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__105_1>

[M¹5h]

DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE DU THÉORÈME SUR LA CONSTANCE DU RAPPORT ANHARMONIQUE DES QUATRE TANGENTES, MENÉES A UNE CUBIQUE PAR UN DE SES POINTS;

PAR M. OSFE MARCUS.

Considérons une cubique Γ et deux points A et B, pris sur cette courbe. La droite AB rencontre Γ en un troisième point C. Par ce point on peut mener quatre tangentes à Γ : soit O le point de contact de l'une d'elles. Une droite quelconque passant par A coupe la courbe en deux autres points A' et A''. Menons la secante OA'; soit B' le troisième point d'intersection de cette droite avec Γ. Menons enfin la droite BB' et soit B'' le troisième point d'intersection de cette droite avec la cubique. Je dis que les droites AA' et BB' se correspondent par homographie.

Il suffit évidemment de démontrer que, à une droite AA', issue de A, il correspond une seule droite BB' issue de B, et réciproquement. Or, d'un côté, les points que nous avons marqués se divisent en les trois groupes suivants de points en ligne droite (A, A', A''), (B, B', B'') et (C, O, O), où O est compté deux fois; d'autre part, les deux groupes de trois points A, B, C et O, A', B' sont respectivement en ligne droite. Il résulte donc d'une propriété connue des groupes de trois points, en ligne droite sur une cubique, que les trois points O, A'', B'' sont en ligne droite. Donc : que l'on considère la droite $AA'A''$ comme étant déterminée par le point A' ou qu'on la considère comme étant déterminée par le point A'', notre construction lui fait correspondre la même sécante $BB'B''$. On voit de même que, réciproquement, à la droite $BB'B''$ notre construction fait correspondre la droite $AA'A''$; ce qui démontre la proposition.

Conséquence. — On voit facilement que, à une tangente à Γ issue de A, il correspond une tangente issue de B. Cette correspondance étant homographique, le rapport anharmonique est conservé. Nous avons donc démontré le théorème suivant :

Le rapport anharmonique de quatre tangentes à une cubique, issues d'un point de cette courbe, est constant quel que soit le point que l'on considère sur la courbe.

Les considérations précédentes permettent de distinguer les tangentes qui se correspondent.