

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 94-96

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_94_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1938.

(1902, p. 479.)

Le centre de gravité des pieds des normales menées d'un point quelconque C à une conique de centre O est au milieu de la distance du point O au centre de gravité des points

d'intersection de la conique et d'un cercle de centre C et de rayon quelconque. (M. D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. E.-N. BARISIEN.

Supposons que la conique soit l'ellipse d'équation

$$(1) \quad b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Soient (α, β) les coordonnées du point C. On sait que l'équation aux abscisses des pieds des normales à (1) issues de C est

$$c^4 x^4 - 2a^2 \alpha c^2 x^3 + a^2 x^2 (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 - c^4) + \dots = 0.$$

La somme de ces abscisses est $\frac{2a^2 \alpha}{c^2}$: par conséquent l'abscisse du centre de gravité des pieds est

$$\frac{1}{4} \left(\frac{2a^2 \alpha}{c^2} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{a^2 \alpha}{2c^2}.$$

Les coordonnées de ce centre de gravité sont donc

$$(2) \quad X = \frac{a^2 \alpha}{2c^2}, \quad Y = \frac{b^2 \beta}{2c^2}.$$

D'autre part, l'équation d'un cercle de centre C et de rayon R s'écrit

$$(3) \quad (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

ou

$$(4) \quad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

L'élimination de y entre (1) et (2) donne l'équation du quatrième degré en x

$$\left(\frac{c^2 x^2}{a^2} - 2\alpha x + b^2 + \alpha^2 + \beta^2 - R^2 \right)^2 = 4\beta^2 \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2)$$

ou

$$\frac{c^4 x^4}{a^4} - \frac{4\alpha c^2}{a^2} x^3 + \dots = 0.$$

La somme des abscisses des quatre points d'intersection de (1) et (4) est $\frac{4a^2 \alpha}{c^2}$. Donc, l'abscisse du centre de gravité de

ces quatre points est $\frac{a^2 \alpha}{c^2}$. Les coordonnées de ce centre de gravité sont, par suite,

$$(5) \quad X_1 = \frac{a^2 \alpha}{c^2}, \quad Y_1 = -\frac{b^2 \beta}{c^2}.$$

La comparaison des formules (2) et (5) démontre la proposition énoncée.

Le centre de gravité des points d'intersection d'un cercle et d'une ellipse ne change pas lorsque le rayon du cercle varie, son centre restant fixe.