

Bibliographie

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4 (1904), p. 82-90

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_82_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

BIBLIOGRAPHIE.

NOTIONS DE MATHÉMATIQUES; par M. J. Tannery. —
NOTIONS HISTORIQUES; par M. P. Tannery. — 1 vol.
(x-352 pages). Paris, Delagrave; 1903.

On sait bien à l'avance, si M. Jules Tannery publie un livre de Mathématiques, soit qu'il traite de théories élevées de l'Analyse, ou qu'il développe un programme de l'enseignement dans les lycées, on sait bien que son livre sera écrit avec toute la science qui y est nécessaire, et aussi avec cette hauteur de vues et cette belle franchise qui inspirent, à tous ceux qui le connaissent, une profonde estime et la plus vive sympathie.

Il y avait ici des difficultés particulières : les notions nouvelles introduites dans le programme de la classe de Philosophie n'étaient enseignées jusque-là qu'à des élèves déjà exercés au calcul et aux raisonnements géométriques. Pour les expliquer à des élèves moins habitués aux études mathématiques, il ne suffisait évidemment pas de reproduire, avec plus de détails, les exposés qui se donnent dans les classes de Mathématiques spéciales.

Le programme indiquait déjà d'éviter les théories trop abstraites et de faire ressortir les idées générales sur des exemples particuliers. Il fallait aussi chercher des raisons plus intuitives, des associations d'idées plus familières, sans descendre, bien entendu, jusqu'aux procédés des préparations trop habiles, mais avec un souci constant d'affermir, en de jeunes esprits, la rectitude du jugement, d'y affiner ce sens de la rigueur qui doit percevoir, de façons différentes, les raisons probables et les démonstrations définitives. Enfin, on devait se préoccuper des acquisitions nécessaires aux étudiants qui suivent les cours des sciences physiques, chimiques et naturelles.

On verra de quelle façon magistrale M. Tannery a résolu ces questions, dont quelques-unes sont délicates et difficiles. Son livre, qui contient d'ailleurs beaucoup de renseignements d'utilité pratique, peut être considéré comme une introduction à l'étude réfléchie des Mathématiques.

A ce titre, on peut le signaler aux professeurs des Écoles Normales : l'enseignement primaire supérieur fournit déjà d'excellentes recrues aux Facultés des Sciences, et il est permis d'espérer que l'on se préoccupera de plus en plus d'assurer, le plus complètement possible, le développement de toutes les intelligences.

Une Introduction qui prend un peu plus des cent premières pages du livre rappelle, dans un ordre logique, les définitions, les propositions et les règles qui seront, plus tard, supposées connues. Un élève qui n'aurait pas pu suivre régulièrement les Cours précédant le Cours de Philosophie y trouvera un guide pour compléter son instruction. Rien de plus utile d'ailleurs, pour tous, que ces vues d'ensemble où les leçons apprises autrefois, une par une, s'ordonnent en groupes naturels, et où la simplification voulue des détails laisse aux idées principales toute leur valeur.

On retrouvera, par exemple, comment on a été conduit à considérer, après les nombres naturels 1, 2, 3, ..., les fractions, les nombres irrationnels, les nombres affectés de signe, et je vais essayer de donner une idée du choix heureux des représentations employées ici. On me permettra de donner tout de suite une impression personnelle : Voilà bien des années que j'enseigne ces choses à des élèves pris dans des catégories très différentes; je suis convaincu que, si l'on expose aux élèves de Philosophie, sans parti pris d'avance, en y mettant le temps et le détail nécessaires, les explications mises au point dans le livre de M. Tannery, ces élèves arriveront, je ne dis pas sans effort (et je ferai des réserves sur le dernier Chapitre qui, d'ailleurs, n'est pas imposé), mais avec un travail qui n'aura rien d'excessif, à acquérir les notions si utiles, introduites dans le nouveau programme.

Les fractions sont introduites en considérant des segments partagés en parties égales, et l'on fait cette remarque, d'où pourraient se déduire toutes les propriétés des fractions, que considérer une fraction, c'est au fond faire un changement d'unité; on a soin de montrer les opérations géométriques que traduisent les opérations sur les fractions.

Les nombres irrationnels se présentent dès que l'on veut définir la mesure d'une grandeur A, après avoir choisi comme unité une grandeur B de même espèce que A.

On observe de suite qu'ils sont inutiles dans la pratique

courante, où les valeurs approchées suffisent toujours. Il faudra lire, au § 68, comment on peut, à l'aide d'une image, se représenter un nombre tel que le rapport π de la circonférence au diamètre. J'indiquerai, un peu en gros, qu'il suffit d'imaginer une bande étroite de papier qui est d'abord rouge jusqu'à un point A, puis bleu à partir d'un point B, séparé de A par un intervalle blanc; le point limite du rouge et le point limite du bleu se rapprochent en empiétant sur l'intervalle blanc, et leur distance devient plus petite que toute la longueur donnée, de sorte qu'il ne peut subsister d'intervalle blanc, et qu'il ne peut rester qu'un point pour séparer la partie rouge et la partie bleue.: les points A et B correspondaient à des valeurs approchées, le point définitif de séparation correspondra à la valeur même de π .

Les opérations sur les nombres irrationnels ne demandent, en fin de compte, que des opérations sur leurs valeurs approchées, et leur résultat peut s'obtenir avec une approximation aussi grande qu'on le veut.

Je regrette de ne pouvoir citer tout au long les §§ 70 et 71, où les nombres affectés de signe sont introduits, en prenant pour exemple une route droite, garnie de bornes, allant du Nord au Sud; je ne crois pas qu'on puisse tirer mieux parti d'un exemple simple et concret comme celui-là.

Les règles pour le calcul des nombres affectés de signe (que M. Tannery appelle des *nombres relatifs*) sont données de suite; on vérifie, après coup, que, dans ce nouveau calcul, les règles observées pour la multiplication des nombres naturels subsistent, et comme il faut encore montrer l'utilité de ces conventions (qu'on a eu le droit de faire, puisqu'elles ne conduisent pas à des contradictions), on étudie en détail le mouvement uniforme d'un mobile sur un axe et l'on fait voir que, grâce à l'introduction des nombres relatifs, on peut résumer en une seule règle tout ce qui se rapporte à de nombreux cas particuliers.

Ces exemples, que j'ai pris exprès dans les parties difficiles pour les commençants, ont, je pense, donné une idée approchée de l'esprit dans lequel est rédigée l'Introduction.

Après l'Introduction, le programme est développé en neuf Chapitres allant de la page 115 à la page 223 et le Livre se termine par des Notions historiques (p. 324-346).

CHAPITRE I : *Sur quelques identités.* — Chacune des identités considérée ici est établie avec tous les détails du calcul qui sert à la vérifier et suivie d'applications qui en montrent de suite l'utilité. C'est ainsi que le développement de $(a + b)^2$ conduit à une méthode pour approcher de plus en plus de la racine d'un nombre donné, quand on connaît déjà une valeur approchée; cette méthode est appliquée aussitôt à des exemples numériques.

L'identité

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

conduira plus tard à la division d'un polynome entier en x par $x - a$, à la dérivée de $x^n \dots$; on l'applique ici au calcul de la somme des termes d'une progression géométrique, et, après avoir déduit de cette identité elle-même que les puissances d'un nombre plus petit que un tendent vers zéro quand leur exposant augmente indéfiniment, on peut trouver la limite vers laquelle tend la somme

$$1 + x + \dots + x^n,$$

où x est un nombre inférieur à un en valeur absolue, lorsque n augmente indéfiniment, résultat très important sur lequel on reviendra à la fin du Volume.

CHAPITRE II : *Algèbre géométrique.* — Si l'on partage un rectangle R en quatre rectangles partiels, en menant une parallèle à la base et une parallèle à la hauteur, on a une figure mettant en évidence l'identité

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd,$$

qui, dans un cas particulier, donne le développement de

$$(a + b)^2.$$

On considère de même plusieurs autres identités qui peuvent se lire sur des figures simples. La relation entre les côtés et l'hypoténuse d'un triangle rectangle est établie en faisant voir qu'on peut, en retranchant d'un même polygone auxiliaire deux triangles égaux au triangle donné, obtenir ou bien le carré construit sur l'hypoténuse ou bien la somme des carrés construits sur les autres côtés.

Enfin, on donne du problème : *Trouver deux lignes, connaissant leur somme et leur produit*, une solution géométrique où l'on pourra voir bientôt une représentation de la résolution d'une équation du second degré.

CHAPITRE III : *Équations du second degré*. — Le cas particulier $x^2 = A$ conduit à donner simplement quelques notions, dans la pratique, sur le calcul des radicaux carrés; puis viennent les questions classiques sur la résolution de l'équation du second degré, les relations entre les racines et les coefficients avec des exemples numériques des différents cas. Après avoir remarqué que les expressions des racines peuvent se déduire de la solution du problème de Géométrie tracé à la fin du Chapitre II, on compare les deux méthodes et l'on fait voir aisément la généralité plus grande de la méthode purement algébrique. « Au reste, cette généralité apparaîtra encore mieux dans les Chapitres qui suivent. A mesure que la science s'est constituée, la recherche d'une plus grande généralité s'est imposée; elle s'impose de plus en plus, à mesure que la science se développe, ou plutôt, la science ne peut se développer que grâce à une généralité toujours plus grande. »

CHAPITRE IV : *Coordonnées*. — Aussitôt après avoir rappelé que la position d'un point sur un axe est fixée par un nombre relatif, on discute la formule du mouvement uniforme

$$x = a + vt,$$

et, pour prendre un exemple bien déterminé, on cherche l'équation du mouvement, entre Paris et Marseille, d'un train dont la vitesse serait la vitesse moyenne d'un train marqué sur l'Indicateur.

Le procédé qui permet de faire correspondre un point à un nombre relatif ne s'applique pas seulement au cas où il s'agit de points sur une droite; il s'applique aussi au cas de points sur une courbe. On le montre d'abord pour un cercle et c'est une occasion d'expliquer la mesure d'un arc en degrés, en grades, en parties de rayon.

Pour obtenir un résultat analogue dans le cas d'une courbe quelconque, on imagine sur un arc de cette courbe des points fixes numérotés et suffisamment rapprochés, comme le sont les points de division d'un rapporteur; on déterminera approxi-

mativement la position d'un point M sur la courbe, si l'on se donne les numéros des deux points fixes consécutifs qui comprennent entre eux le point M. Cette conception pourra faire utilement réfléchir des étudiants plus avancés et sachant déjà ce qu'on entend par la longueur d'un arc de courbe.

Après ces explications il n'y a aucune difficulté à définir les coordonnées rectilignes dans le plan et dans l'espace et même des coordonnées curvilignes; on fait pressentir l'utilité de ces coordonnées générales en expliquant la représentation du globe terrestre sur une Carte plane.

CHAPITRE V : *Courbes empiriques*. — Les exemples choisis sont déjà en partie indiqués dans le programme : courbe des températures, des poids, applications à la statistique. Mais les courbes, aussi bien que les Tableaux de statistique, doivent être convenablement interprétées. Pour la courbe représentant la variation du poids d'un enfant, la discussion est faite en deux pages et demie, avec l'intérêt minutieux que pourrait y apporter un père de famille et avec une netteté dans la critique que les élèves feront bien de remarquer, en vue d'autres occasions. A propos de la courbe des températures, on indique l'essentiel sur le mécanisme des instruments enregistreurs.

Si l'on étudie, dans un phénomène physique, la variation de deux grandeurs qui dépendent l'une de l'autre, à chaque expérience correspondra un point rapporté à deux axes fixes, et l'on cherchera à tracer la courbe, la plus régulière possible, et passant le plus près possible des points fournis par les expériences les plus satisfaisantes. La détermination de cette courbe moyenne peut se faire par des méthodes qu'il ne peut être question d'expliquer ici; on a voulu seulement en donner une idée, et sans doute faire réfléchir sur ce que peut être une loi déduite d'expériences.

CHAPITRE VI : *Notions de Géométrie analytique*. — On indique sur des exemples ce qu'on entend par *fonctions d'une variable*. Après avoir insisté sur la détermination d'une droite rapportée à deux axes, et expliqué tout ce qu'on peut lire sur un graphique de chemins de fer, on étudie les exemples simples indiqués dans le programme et l'on compare, sur ces exemples, les procédés de la Géométrie pure et ceux de la Géométrie analytique.

CHAPITRE VII : *Tangentes. Vitesses. Dérivées.* — La première idée que l'on se fait d'une tangente à un arc de courbe est, sans doute, celle d'une droite qui a un seul point commun avec cet arc. Il convient donc d'habituer les élèves à considérer une tangente comme limite d'une sécante passant par un point M de la courbe et par un point infiniment voisin de M, sur la courbe. C'est ce que l'on fait en se servant du cercle et de la parabole.

La détermination de la tangente à une courbe $y = f(x)$ conduit à chercher la limite vers laquelle tend le rapport

$$\frac{f(x') - f(x)}{x' - x},$$

quand x' tend vers x .

En se plaçant à un autre point de vue, qui était celui de Newton, on regarde la courbe $y = f(x)$ comme le diagramme d'un mouvement sur Oy . On suppose qu'un mobile P se déplace sur Ox d'un mouvement uniforme et que le nombre relatif qui détermine la position de ce mobile est pris pour mesure du temps; puis on considère le point M de la courbe qui se projette en P sur Ox , et c'est la projection Q de M sur Oy dont on étudie le mouvement.

Pour trouver la vitesse du point Q, on est encore conduit à chercher la limite du rapport qui vient d'être considéré, à propos de la tangente.

Après avoir expliqué ces deux représentations, l'une géométrique, l'autre cinématique, on peut définir la dérivée d'une fonction et chercher les dérivées de quelques fonctions qu'on choisit exprès, aussi simples que possible. Pour passer des propriétés de la dérivée à celles de la fonction, on s'aidera des deux représentations; les démonstrations ainsi obtenues ne sont pas entièrement rigoureuses; M. Tannery fait toucher du doigt ce qui demanderait de plus longues explications et indique qu'on possède des démonstrations irréprochables des propositions qu'il vient d'énoncer et dont il a bien fait comprendre le sens. Il montre l'utilité de la dérivée pour étudier les variations d'une fonction. Il signale enfin l'importance du problème : Étant donnée une fonction $f(x)$, trouver une autre fonction $F(x)$ dont la dérivée soit $f(x)$.

CHAPITRE VIII : *Aires. Volumes. Notions de Calcul intégral.* — Jusqu'ici, un élève qui avait suivi, en y travaillant, les

cours de Mathématiques faits dans les classes de Lettres savait calculer l'aire d'un polygone; mais, si l'on excepte le cas du cercle, il n'avait pas d'idée de la mesure d'une aire limitée par contour curviligne. Or, cette notion d'aire intervient, au moins comme représentation, dans un grand nombre de questions, par exemple quand on veut évaluer le travail d'une force variable, et d'autre part des notions théoriques d'une importance capitale peuvent y être rattachées.

La question de l'évaluation des aires est-elle trop difficile pour être expliquée à des élèves de Philosophie? On verra, en lisant ce Chapitre, qu'on ne suppose rien en dehors de ce qui a déjà été enseigné à ces élèves; il est vrai que l'attention doit être soutenue un peu plus longtemps et, d'un autre côté, l'aspect nouveau de ces questions, l'incrédulité de personnes initiées aux Mathématiques, mais n'ayant pas eu le temps de lire avec soin des exposés tels que celui de M. Tannery pourront, la première année, faire paraître la difficulté plus grande qu'elle ne l'est en réalité. Ceux qui feront cette étude, sans parti pris et avec quelque persévérance, en seront largement récompensés.

Un contour étant tracé sur une feuille de papier quadrillé, on a une mesure approchée par défaut de l'aire limitée par ce contour, si l'on compte les carrés intérieurs et non traversés par le contour; il suffit d'ajouter la somme des carrés traversés pour avoir une limite supérieure de l'aire, et tout revient à voir que cette somme des carrés traversés devient négligeable si l'on prend le quadrillage de plus en plus serré. Cette indication intuitive est reprise avec une précision et une rigueur parfaites dans deux paragraphes que l'Auteur prend soin d'ailleurs de signaler comme pouvant très bien être passés. On voit déjà comment on peut faire correspondre un nombre à une aire, et l'on pourra même trouver une valeur approchée de ce nombre, par le procédé indiqué, pour des courbes se présentant dans la pratique.

Mais il reste à voir comment on peut obtenir exactement ce nombre pour des courbes définies géométriquement.

Or, si l'on considère l'aire A limitée par une courbe $y = f(x)$, l'axe des x , une ordonnée fixe et une ordonnée variable qui correspond à une abscisse x , cette aire A est une fonction de x , dont la dérivée est précisément $f(x)$. Si l'on connaît une fonction $F(x)$ admettant $f(x)$ pour dérivée, l'aire consi-

dérée a pour mesure

$$F(x) - F(x_0),$$

x_0 désignant l'abscisse qui correspond à l'ordonnée fixe. On aperçoit bien la grande utilité de ces fonctions primitives.

Le raisonnement précédent, interprété à un autre point de vue, donne un autre aperçu sur le Calcul intégral : $f(x)$ étant une fonction continue, si l'on ne sait pas former avec les fonctions connues une fonction admettant $f(x)$ comme dérivée, on pourra définir à l'aide d'une aire une fonction primitive de $f(x)$, et calculer ensuite la valeur de cette fonction primitive avec une approximation aussi grande que l'on voudra. M. Tannery en fait une très intéressante application à l'étude des logarithmes, en cherchant quelles sont les propriétés de la fonction dont la dérivée est $\frac{1}{x}$. Cette méthode pour introduire en Analyse la fonction $\log x$ présente des avantages à remarquer; ces avantages apparaîtront mieux encore à ceux des lecteurs qui étudieront, dans la suite, les fonctions des variables complexes.

On montre enfin comment l'évaluation du volume limité par une surface et par deux plans parallèles se ramène à la recherche d'une fonction primitive, et l'on en fait l'application à la détermination des volumes considérés en élémentaires.

CHAPITRE IX : *Limites. Infinitement petits. Séries.* — Il est bien inutile de dire que ces questions sont élucidées avec le plus grand soin. Mais il ne dépend pas de l'Auteur qu'elles ne soient difficiles pour des élèves de Philosophie. En tout cas, ce Chapitre sera un complément intéressant au livre classique qu'ils auront pu étudier très bien jusque-là, livre qu'ils garderont une fois leurs études finies et qu'ils pourront placer dans leurs bibliothèques, non loin de leurs autres livres de Philosophie.

Des notions historiques très précises sont données dans les vingt-cinq dernières pages. Elles ont été rédigées par M. Paul Tannery, l'un des historiens les plus autorisés des Mathématiques.

E. LACOUR.
