

E. GOURSAT

**Remarque sur le développement en série
entière d'une branche de fonction implicite**

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 69-76

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_69_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

[2b α]

**REMARQUE SUR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE ENTIÈRE
D'UNE BRANCHE DE FONCTION IMPLICITE;**

PAR M. E. GOURSAT.

Toute équation $F(x, y) = 0$, dont le premier membre est une fonction holomorphe de deux variables x et y dans le voisinage d'un système de valeurs x_0, y_0 , pour lequel on a $F(x_0, y_0) = 0$, la dérivée $\frac{\partial F}{\partial y}$ n'étant pas nulle pour $x = x_0, y = y_0$, définit une fonction analytique $y(x)$ se réduisant à y_0 pour $x = x_0$, et holomorphe dans le domaine de ce point. On peut obtenir les coefficients du développement de cette branche de fonction

$$y = y_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots,$$

en remplaçant y par ce développement dans $F(x, y)$, et en égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de $x - x_0$. Les calculs effectués par cette méthode deviennent très rapidement compliqués, dès qu'on veut calculer plus de trois ou quatre coefficients. Si l'on veut calculer un plus grand nombre de coefficients, il peut y avoir intérêt à se servir d'une remarque bien simple, que je n'ai trouvée dans aucun Ouvrage classique. Elle consiste en ceci : *Si l'on connaît les n premiers termes de la série cherchée, on peut, par une simple division de polynômes, calculer les coefficients des $(n + 1)$ termes suivants.*

1. Considérons l'équation

$$(1) \quad y = \varphi_0(x) + y \varphi_1(x) + y^2 \varphi_2(x) + \dots + y^n \varphi_n(x),$$

où $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ sont des fonctions holomorphes de x dans le domaine de l'origine, les deux premières $\varphi_0(x)$ et $\varphi_1(x)$ étant nulles pour $x = 0$.

Cette équation admet, comme l'on sait, une racine et une seule qui tend vers zéro avec x , et cette racine est une fonction holomorphe $F(x)$ dans le domaine de l'origine. Pour obtenir les coefficients du développement de $F(x)$ en série entière, on peut, par exemple, procéder comme il suit.

Supposons les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ développées en séries entières; les deux premières séries commencent par des termes du premier degré au moins. Pour prendre le cas général, supposons que le premier terme de $\varphi_0(x)$ soit de degré p , $a_p x^p$; le premier terme de la série cherchée est précisément $a_p x^p$. En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$y - y \varphi_1(x) - y^2 \varphi_2(x) - \dots - y^n \varphi_n(x) = \varphi_0(x),$$

on voit que le terme du plus bas degré dans y ne se réduit avec aucun autre dans le premier membre de cette relation : il est donc identique au premier terme de $\varphi_0(x)$, c'est-à-dire à $a_p x^p$. Pour avoir le terme suivant du développement cherché, on pose $y = a_p x^p + z$, ce qui conduit pour déterminer z à une équation de même forme que l'équation (1)

$$(2) \quad z = \psi_0(x) + z \psi_1(x) + z^2 \psi_2(x) + \dots + z^n \psi_n(x),$$

où l'on a

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \varphi_0(x) - a_p x^p + \varphi_1(x) a_p x^p \\ &\quad + \varphi_2(x) a_p^2 x^{2p} + \dots + \varphi_n(x) a_p^n x^{np}, \end{aligned}$$

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x) + 2 a_p x^p \varphi_2(x) + \dots + n a_p^{n-1} x^{(n-1)p} \varphi_n(x);$$

$\varphi_1(x)$ étant divisible par x , il en est de même

de $\psi_1(x)$, et le développement de $\psi_0(x)$ commence par un terme de degré $p + 1$ au moins. Le premier terme de $\psi_0(x)$ donnera de même le second terme de $F(x)$ et, en continuant de la sorte, on pourra calculer autant de termes qu'on le voudra de la série cherchée.

En opérant de la sorte, il semble que le calcul de chaque terme nouveau exige une nouvelle transformation. Nous allons montrer que, si l'on a $p > 1$, on peut, par une simple division de polynômes, calculer les p premiers termes du développement de la racine de l'équation (1) qui est nulle pour $x = 0$.

Nous pouvons, en effet, écrire l'équation (1)

$$(3) \quad y = \frac{\varphi_0(x)}{1 - \varphi_1(x)} + y^2 \frac{\varphi_2(x)}{1 - \varphi_1(x)} + \dots + y^n \frac{\varphi_n(x)}{1 - \varphi_1(x)};$$

$\varphi_1(x)$ étant nul pour $x = 0$, les fonctions

$$\frac{\varphi_0}{1 - \varphi_1}, \quad \frac{\varphi_2}{1 - \varphi_1}, \quad \dots, \quad \frac{\varphi_n}{1 - \varphi_1}$$

sont également des fonctions holomorphes dans le domaine de l'origine. Désignons-les pour abrégé par $\pi_0, \pi_2, \dots, \pi_n$, et écrivons l'équation (3)

$$(3)' \quad y = \pi_0(x) + y^2 \pi_2(x) + \dots + y^n \pi_n(x).$$

Le développement de $\pi_0(x)$ commence par le terme $a_p x^p$; imaginons que l'on ait calculé les termes suivants jusqu'au terme de degré $2p - 1$,

$$\pi_0(x) = a_p x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_{2p-1} x^{2p-1} + \dots,$$

les termes non écrits étant divisibles par x^{2p} . Il suffit évidemment de prendre dans $\varphi_0(x)$ et dans

$$1 - \varphi_1(x)$$

les termes de degré inférieur à $2p$, et de diviser l'un par

l'autre les deux polynomes ainsi obtenus, en ordonnant le quotient par rapport aux puissances croissantes de x , jusqu'à ce qu'on obtienne un reste de degré supérieur à $2p - 1$.

Cela posé, je dis que les p premiers termes du développement de la racine cherchée y sont précisément

$$\alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots + \alpha_{2p-1} x^{2p-1} = P(x).$$

Si nous faisons, en effet, la transformation

$$y = \alpha_p x^p + \alpha_{p+1} x^{p+1} + \dots + \alpha_{2p-1} x^{2p-1} + z = P(x) + z,$$

dans l'équation (3)' elle prend la forme

$$(4) \quad z = \zeta_0(x) + z \zeta_1(x) + \dots + z^n \zeta_n(x),$$

où $\zeta_0(x)$ est égal à

$$\pi_0(x) - P(x) + \pi_2(x) P^2(x) + \dots + \pi_n(x) P_n^2(x).$$

Le premier terme de $\zeta_0(x)$ est au moins de degré $2p$, de sorte que le développement de z commencera par un terme de degré $2p$ au moins, ce qui démontre la proposition énoncée.

Il est maintenant aisé de voir comment cette remarque s'applique au calcul du développement de la racine

$$y = F(x)$$

de l'équation (1) qui est nulle pour $x = 0$. Plaçons-nous dans le cas le plus défavorable, celui où $\varphi_0(x)$ commence par un terme du premier degré $a_1 x$; en posant

$$y = a_1 x + y_1,$$

on est conduit à une équation de même forme

$$(5) \quad y_1 = \varphi_{01}(x) + y_1 \varphi_{11}(x) + y_1^2 \varphi_{21}(x) + \dots + y_1^n \varphi_{n1}(x),$$

$\varphi_{01}(x)$ commençant par un terme du second degré au moins. Soient

$$b_2x^2 + b_3x^3$$

les deux premiers termes du quotient de $\varphi_{01}(x)$ par $1 - \varphi_{11}(x)$; ce sont aussi les deux premiers termes du développement de γ_1 . En posant

$$\gamma_1 = b_2x^2 + b_3x^3 + \gamma_2,$$

on sera conduit à une équation de même forme

$$(6) \quad \gamma_2 = \varphi_{02}(x) + \gamma_2 \varphi_{12}(x) + \gamma_2^2 \varphi_{22}(x) + \dots + \gamma_2^n \varphi_{n2}(x),$$

$\varphi_{02}(x)$ commençant par un terme du quatrième degré au moins. Une nouvelle division donnera les quatre premiers termes du développement de γ_2 , et ainsi de suite.

On voit qu'à chaque opération on peut doubler le nombre des coefficients déjà obtenus.

Je n'insisterai pas sur les diverses simplifications qui peuvent se présenter, et qui permettent parfois d'obtenir un plus grand nombre de termes que le nombre que l'on pouvait prévoir *a priori*; c'est ce qui aura lieu, par exemple, si le développement de la racine cherchée présente des lacunes. Remarquons aussi que, lorsqu'on a fixé à l'avance le nombre de termes que l'on veut obtenir, on n'a besoin que de calculer quelques-uns des coefficients des fonctions $\varphi_{ih}(x)$. Par exemple, si l'on veut s'arrêter après la seconde transformation, il suffira de calculer dans $\varphi_{02}(x)$ et $\varphi_{12}(x)$ les termes de degré inférieur à 8; il sera inutile de calculer aucun des coefficients de $\varphi_{22}(x)$, $\varphi_{32}(x)$, ... Enfin, la méthode reste évidemment la même, si, au lieu d'avoir dans le second membre de l'équation (1) un polynome de degré n en γ , on avait une série entière en x et γ , convergente pour

les valeurs de x et de y ne dépassant pas certaines limites ⁽¹⁾.

Exemple. — Soit l'équation

$$y = x + xy^3;$$

le premier terme du développement est x . Posons

$$y = x + y_1;$$

l'équation en y_1 est

$$y_1 = x^4 + 3x^3y_1 + 3x^2y_1^2 + xy_1^3.$$

Nous pouvons obtenir ici les premiers termes de y_1 jusqu'au terme en x^7 en divisant x^4 par $1 - 3x^3$, ce qui donne pour ces premiers termes $x^4 + 3x^7$.

Posons encore

$$y_1 = x^4 + 3x^7 + y_2 = x^4(1 + 3x^3) + y_2;$$

l'équation en y_2 est, en n'écrivant que les deux premiers

(¹) La remarque qui sert de point de départ peut aisément être généralisée. Si le premier terme de $\pi_0(x)$ est de degré p , on démontre de la même façon que le développement de la racine de l'équation (3), qui est nulle pour $x=0$, coïncide, jusqu'au terme de degré $3p-1$ inclusivement, avec le développement de la fonction

$$\pi_0(x) + \pi_2(x) [\pi_0(x)]^2,$$

jusqu'au terme de degré $4p-1$ inclusivement avec le développement de la fonction

$$\pi_0 + \pi_2\pi_0^2 + (2\pi_2^2 + \pi_3)\pi_0^3,$$

et ainsi de suite.

D'une façon générale, le développement cherché est identique, jusqu'au terme de degré $mp-1$ inclusivement, avec le développement de la racine de l'équation auxiliaire

$$Y = \varphi_0(x) + Y\varphi_1(x) + Y^2\varphi_2(x) + \dots + Y^{m-1}\varphi_{m-1}(x),$$

qui est nulle pour $x=0$.

termes du second membre,

$$\begin{aligned} y_2 = & 9x^{10} + 3x^{10}(1 + 3x^3)^2 + x^{13}(1 + 3x^3)^3 \\ & + y_2[3x^3 + 6x^6(1 + 3x^3) + 3x^9(1 + 3x^3)^2] \\ & + \dots, \end{aligned}$$

une nouvelle division donnera les termes suivants jusqu'au terme en x^{19} .

2. On peut faire des remarques analogues pour les développements des intégrales d'une équation différentielle du premier ordre. Considérons l'équation

$$y' = F(x, y),$$

où le second membre est une fonction holomorphe des deux variables x et y , dans le domaine du point

$$x = y = 0.$$

On peut l'écrire, en ordonnant le second membre par rapport aux puissances croissantes de y ,

$$(7) \quad y' = \varphi_0(x) + y\varphi_1(x) + y^2\varphi_2(x) + \dots + y^n\varphi_n(x) + \dots,$$

$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n, \dots$ étant des fonctions holomorphes dans le domaine du point $x = 0$.

Proposons-nous de calculer les premiers coefficients du développement de l'intégrale qui est nulle pour $x = 0$. Si le premier terme de $\varphi_0(x)$ est $b_p x^p$, on voit aisément que le premier terme de l'intégrale est $\frac{b_p + 1}{p + 1} x^{p+1}$. Cela étant, prenons dans $\varphi_0(x)$ les termes de degré inférieur à $2p + 2$

$$b_p x^p + \dots + b_{2p+1} x^{2p+1},$$

et dans $\varphi_1(x)$ les termes de degré inférieur à $p + 1$,

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_p x^p,$$

et soit Y l'intégrale de l'équation auxiliaire

$$(8) \quad \begin{cases} Y' = b_p x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \dots + b_{2p+1} x^{2p+1} \\ \quad + Y(a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p), \end{cases}$$

qui est nulle pour $x = 0$. En posant $y = Y + z$ dans l'équation (7), elle se change en une équation de même forme

$$(9) \quad z' = \psi_0(x) + \psi_1(x)z + \dots + \psi_n(x)z^n + \dots,$$

où le terme indépendant de z dans le second membre a pour expression

$$\psi_0(x) = \varphi_0(x) - Y' + Y\varphi_1(x) + Y^2\varphi_2(x) + \dots$$

Or, $\varphi_0(x) - Y' + Y\varphi_1(x)$ peut s'écrire, en tenant compte de la relation (8),

$$\begin{aligned} \varphi_0(x) - (b_p x^p + b_{p+1} x^{p+1} + \dots + b_{2p+1} x^{2p+1}) \\ + Y[\varphi_1(x) - a_0 - a_1 x + \dots + a_p x^p], \end{aligned}$$

et, comme le premier terme de Y est de degré $p + 1$, le premier terme de $\psi_0(x)$ sera de degré $2p + 2$. Il s'ensuit que le développement de z commencera par un terme de degré $2p + 3$, ou que le développement de y coïncidera avec celui de Y jusqu'au terme du degré $2p + 2$ inclusivement.

Il suffira donc de calculer le développement de Y jusqu'à ce terme.

On pourrait déduire de cette remarque des conséquences analogues à celles qui ont été développées plus haut pour les fonctions implicites.