

Solutions de questions proposées

Nouvelles annales de mathématiques 4^e série, tome 4
(1904), p. 573-576

[<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_573_0>](http://www.numdam.org/item?id=NAM_1904_4_4_573_0)

© Nouvelles annales de mathématiques, 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOLUTIONS DE QUESTIONS PROPOSÉES.

1996.

(1904, p. 192.)

La caustique par réflexion d'une ellipse pour des rayons parallèles au grand axe est une sextique unicursale dont l'aire est

$$\frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a},$$

a et b étant les demi-axes de l'ellipse.

(E.-N. BARISIEN.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

Soient $M(a \cos \varphi, b \sin \varphi)$ un point de l'ellipse, m le coefficient angulaire du rayon réfléchi en ce point.

On détermine m en écrivant que la direction

$$b \cos \varphi \cdot x + a \sin \varphi \cdot y = 0$$

de la tangente à l'ellipse en M satisfait à l'équation

$$m(y^2 - x^2) + 2xy = 0$$

des bissectrices des droites

$$y = 0, \quad y - mx = 0,$$

ce qui donne

$$m = \frac{2ab \sin \varphi \cos \varphi}{b^2 \cos^2 \varphi - a^2 \sin^2 \varphi}.$$

L'équation du rayon réfléchi en M est donc

$$(1) \quad \begin{cases} 2ab \sin \varphi \cos \varphi \cdot x + (a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi) y \\ - b \sin \varphi (a^2 + c^2 \cos \varphi) = 0. \end{cases}$$

Cette équation, jointe à celle obtenue en la dérivant par rapport à φ , détermine l'enveloppe cherchée. L'équation dérivée est

$$(2) \quad \begin{cases} 2ab(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)x + 2(a^2 + b^2) \sin \varphi \cos \varphi \cdot y \\ - b \cos \varphi (a^2 + c^2 - 3c^2 \sin^2 \varphi) = 0. \end{cases}$$

(1) et (2) résolus, par rapport à x et y , donnent

$$(3) \quad \begin{cases} x = \frac{\cos \varphi}{2a} [3a^2 - (a^2 + b^2) \cos^2 \varphi], \\ y = b \sin^3 \varphi. \end{cases}$$

En remplaçant $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ par leurs valeurs en fonction de $t = \tan \frac{\varphi}{2}$, on voit que la courbe (3) est une sextique unicursale.

Calcul de l'aire :

$$\begin{aligned} S &= \frac{6b}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi [b^2 - (a^2 + b^2) \sin^2 \varphi] d\varphi \\ &= \frac{6b^3}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi d\varphi - \frac{6b(a^2 + b^2)}{a} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Posant

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi d\varphi,$$

$$I' = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^6 \varphi d\varphi,$$

on voit que

$$I' = I - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi.$$

Intégrant par parties l'intégrale du second membre, on obtient

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^4 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{5} I'.$$

Par suite

$$I' = \frac{5}{6} I,$$

et alors

$$(4) \quad S = \frac{b(b^2 - 5a^2)}{a} I.$$

Or

$$\cos 4\varphi = \cos^2 2\varphi - \sin^2 2\varphi = 1 - 4(1 - 2\cos^2 \varphi) + 8\sin^4 \varphi,$$

d'où

$$\sin^4 \varphi = \frac{1}{8} (\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3)$$

et

$$I = \frac{1}{8} \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3) d\varphi = -\frac{3\pi}{16};$$

l'équation (4) donne alors

$$S = \frac{3\pi b(5a^2 - b^2)}{16a}.$$

C'est l'expression cherchée.

Les expressions (3) permettent de construire la courbe sans difficulté.

En éliminant $\sin \varphi$ et $\cos \varphi$ entre ces deux équations et

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1,$$

on voit que l'équation cartésienne de la courbe est

$$\begin{aligned} & 27c^6(a^2 + b^2)^3 b^2 y^4 \\ & + [4a^2 b^2 x^2 + (a^2 + b^2)^2 y^2 - b^2(2a^2 - b^2)^2]^3 \\ & + 27c^2(a^2 + b^2)(2a^2 - b^2)b^4 y^2 \\ & \times [4a^2 b^2 x^2 + (a^2 + b^2)^2 y^2 - b^2(2a^2 - b^2)^2] \\ & - 27b^{10}(2a^2 - b^2)^2 y^2 = 0. \end{aligned}$$

1997.

(1901, p. 240.)

Démontrer l'identité

$$\begin{aligned} & 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \left(x + n \frac{a}{2} \right) \\ & = \sin x + C_n^1 \sin(x + a) + C_n^2 \sin(x + 2a) + \dots \\ & \quad + C_n^p \sin(x + pa) + \dots + C_n^n \sin(x + na), \end{aligned}$$

où $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^n$ sont les coefficients binomiaux.

(C. BOURLET.)

SOLUTION

Par M. LETIERCE.

De

$$\cos^n \frac{a}{2} = \frac{\left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}} \right)^n}{2^n}$$

et

$$\sin \left(x + n \frac{a}{2} \right) = \frac{e^{ix} e^{in\frac{a}{2}} - e^{-ix} e^{-in\frac{a}{2}}}{2i},$$

on tire

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \left(x + n \frac{a}{2} \right) \\ = \frac{1}{2i} \left[e^{ix} e^{in\frac{a}{2}} \left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}} \right)^n - e^{-ix} e^{-in\frac{a}{2}} \left(e^{i\frac{a}{2}} + e^{-i\frac{a}{2}} \right)^n \right] \\ = \frac{1}{2i} [e^{ix}(1 + e^{ia})^n - e^{-ix}(1 + e^{-ia})^n] \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \left(x + n \frac{a}{2} \right) \\ = \frac{1}{2i} \left[e^{ix} (1 + C_n^1 e^{ia} + C_n^2 e^{2ia} + \dots + C_n^p e^{pia} + \dots + C_n^n e^{nia}) \right. \\ \left. - e^{-ix} (1 + C_n^1 e^{-ia} + C_n^2 e^{-2ia} + \dots + C_n^p e^{-pia} + \dots + C_n^n e^{-nia}) \right] \\ = \frac{1}{2i} \left[(e^{ix} - e^{-ix}) + C_n^1 (e^{i(x+a)} - e^{-i(x+a)}) + C_n^2 (e^{i(x+2a)} - e^{-i(x+2a)}) \right. \\ \left. + \dots + C_n^p (e^{i(x+pa)} - e^{-i(x+pa)}) + \dots + C_n^n (e^{i(x+na)} - e^{-i(x+na)}) \right] \end{aligned}$$

ou enfin

$$\begin{aligned} 2^n \cos^n \frac{a}{2} \sin \left(x + n \frac{a}{2} \right) \\ = \sin x + C_n^1 \sin(x + a) + C_n^2 \sin(x + 2a) + \dots \\ + C_n^p \sin(x + pa) + \dots + C_n^n \sin(x + na). \end{aligned}$$

C. Q. F. D.